

7 Spezielle Relativitätstheorie

7.1 Einsteins Postulate

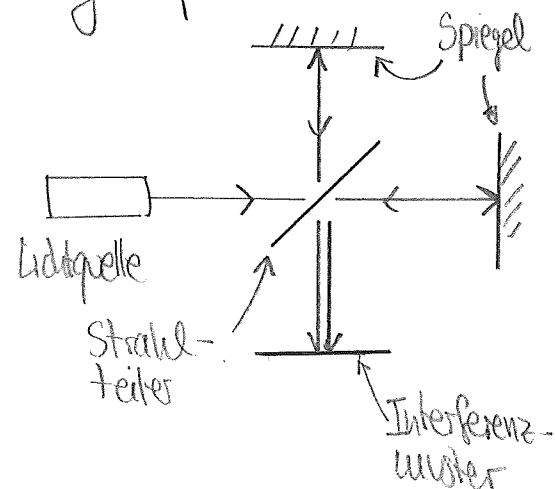
Axiome der Relativitätstheorie:

- (I) Alle Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Gestalt (Relativitätsprinzip)
- (II) Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist in allen Inertialsystemen gleich (Universalität der Lichtgeschwindigkeit)

Bemerkungen:

- (1) Axiom II ist experimenteller Fakt: Michelson-Morley-Experiment

(Interferenzmuster unabhängig von Position der Interferometer zur Erdbewegung)

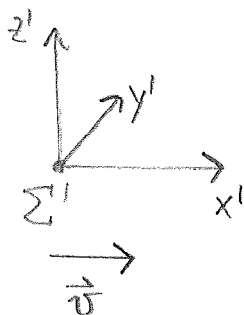
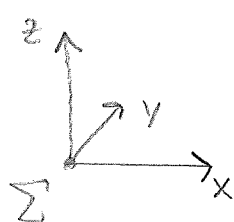


- (2) Axiom II erlaubt Definition der Längeneinheit Meter, sodass

$$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{exakt!})$$

(3) Axiom II widerspricht Galilei-Transformationen:

(94)



$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned} \Rightarrow c' = c - v \neq c$$

⇒ Annahme einer absoluten Zeit $t' = t$ nicht gerechtfertigt!

7.2 Lorentz-Transformation

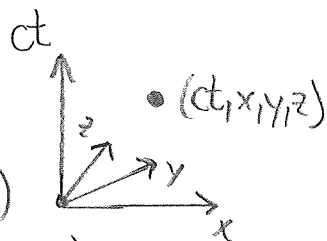
Annahme: Inertialsystem Σ' bewege sich relativ zu Inertialsystem Σ mit Geschwindigkeit $v < c$. Für $t = t' = 0$ seien Koordinatensysteme identisch.

Auslösen einer elektromagnetischen Kugelwelle (Ursprung für $t = t' = 0$):

$$\Sigma: \quad c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = c^2 t^2 - \vec{r}^2$$

$$\Sigma': \quad c'^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad \text{mit } c' \stackrel{!}{=} c \quad \Rightarrow \quad 0 = c^2 t'^2 - \vec{r}'^2$$

Ereignis: Punkt $(ct, \vec{r})$ in 4-dimensionaler Raumzeit
("Minkowski-Raum")



Kontravarianter 4er-Ortsvektor: $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) := (ct, x, y, z)$

Kovarianter 4er-Ortsvektor $(x_\mu) = (x_0, x_1, x_2, x_3) := (ct, -x, -y, -z)$

Beziehung zwischen (x^μ) und (x_μ) :

(95)

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu$$

mit dem "metrischen Tensor"

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

"Abstand" eines Ereignisses $(ct, \vec{r})$ zum Ursprung $(0, \vec{0})$:

$$S^2 := (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

"Skalarprodukt im Minkowski-Raum"

19. VL

Beispiel (Kugelwelle am Ursprung für $t=t'=0$):

$$S^2 = S'^2 = 0$$

Invarianz des Skalarproduktes unter Lorentz-Transformationen:

$$S^2 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu \stackrel{!}{=} S'^2 = \sum_{\mu=0}^3 x'^\mu x'_\mu$$

Begründung: Homogenität von Zeit und Raum

Interpretation: s^2 ist vom Bezugssystem unabhängiges Maß für kausale Separation zweier Ereignisse:

- (a) $s^2 > 0$ ("zeitartiges Intervall"): Ereignisse können kausal zusammenhängen.
Es existiert Σ' , so dass Ereignisse am gleichen Ort, aber zu unterschiedlichen Zeiten mit Zeitdifferenz $c\Delta t = s$ stattfinden.
- (b) $s^2 = 0$ ("lichtartiges Intervall"): Ereignisse können nur durch Lichtsignale zusammenhängen.
- (c) $s^2 < 0$ ("raumartiges Intervall"): Ereignisse können kausal nicht zusammenhängen.

Eigenschaften (allgemeine Lorentz-Transformation):

(1) Linearität: $x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ und $x'_{\mu} = \sum_{\eta=0}^3 L_{\mu}^{\eta} x_{\eta}$

Begründung: geradlinig gleichförmige Bewegung in $\Sigma' \Leftrightarrow$
geradlinig gleichförmige Bewegung in Σ

(2) Invarianz des Skalarproduktes: $\sum_{\mu=0}^3 x'^{\mu} x'_{\mu} = \sum_{\eta=0}^3 x^{\eta} x_{\eta}$

$$\Rightarrow \sum_{\mu, \nu, \eta=0}^3 L^{\mu}_{\nu} L_{\mu}^{\eta} x^{\nu} x_{\eta} = \sum_{\eta=0}^3 x^{\eta} x_{\eta}$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu=0}^3 L^{\mu}_{\nu} L_{\mu}^{\eta} = \delta_{\nu}^{\eta} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu=\eta \\ 0 & \text{für } \nu \neq \eta \end{cases}$$

$$\Rightarrow (L^{\mu}_{\nu}) \text{ und } (L_{\mu}^{\eta}) \text{ zueinander inverse Matrizen}$$

Interpretation: Lorentz-Transformationen sind verallg. Drehungen
und Spiegelungen im Minkowski-Raum

Matrixdarstellung (spezielle Lorentz-Transformation):

(98)

Annahme: Σ' bewege sich entlang der x-Achse von Σ

$$\Rightarrow t' = t'(x, t), \quad x' = x'(x, t) \text{ mit } x' = 0 \text{ f\"ur } x = vt, \quad y' = y, \quad z' = z$$

$$\Rightarrow (L^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} L^0_0 & L^0_1 & 0 & 0 \\ L^1_0 & L^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ct' = L^0_0 ct + L^0_1 x$$

$$x' = L^1_0 ct + L^1_1 x$$

Invarianz des Skalarproduktes: $s'^2 \stackrel{!}{=} s^2$

$$\Rightarrow (L^0_0 ct + L^0_1 x)^2 - (L^1_0 ct + L^1_1 x)^2 \stackrel{!}{=} (ct)^2 - x^2$$

$$(L^0_0)^2 - (L^1_0)^2 \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow (L^0_1) - (L^1_1)^2 \stackrel{!}{=} -1$$

$$L^0_0 L^0_1 - L^1_0 L^1_1 \stackrel{!}{=} 0$$

Aus $x' = 0$ f\"ur $x = vt$ folgt:

$$0 = L^1_0 ct + L^1_1 vt \Rightarrow L^1_0 = -\frac{v}{c} L^1_1$$

Lösung:

99

$$L^1_1 = L^0_0 = \gamma \quad \text{mit} \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \gg 1$$
$$L^1_0 = L^0_1 = -\frac{v}{c} \gamma$$

Spezielle Lorentz-Transformation:

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right)$$

$$x' = \gamma \left(x - vt \right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Bemerkung: Für $v \ll c$ ist $\gamma \approx 1 \Rightarrow t' \approx t$ und $x' \approx x - vt$

$\Rightarrow$ Galilei-Transformation im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten

7.3 Kinematische Schlussfolgerungen aus Lorentz-Transformation

100

(i) Relativität der Gleichzeitigkeit:

Ereignisse, die in Σ gleichzeitig sind ($\Delta t = 0$), aber an verschiedenen Orten stattfinden ($\Delta x \neq 0$), erscheinen in Σ' als nicht gleichzeitig ($\Delta t' \neq 0$)

$$\text{Beweis: } \Delta t' = \gamma \left(\underbrace{\Delta t}_{=0} - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = -\gamma \frac{v}{c^2} \Delta x \neq 0$$

(ii) Längenkontraktion:

Maßstäbe, die in Σ ruhen, erscheinen in Σ' verkürzt.

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \Delta x' &= \gamma (\Delta x - v \Delta t) \quad , \quad \Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \begin{array}{l} \text{(in } \Sigma' \text{ gleichzeitige} \\ \text{Messung der} \\ \text{Endpunkte)} \end{array} \\ &\quad \uparrow \text{"Ruhelänge" in } \Sigma \\ \Rightarrow \Delta x' &= \gamma \left(\Delta x - \frac{v^2}{c^2} \Delta x \right) = \frac{\Delta x}{\gamma} < \Delta x \end{aligned}$$

(iii) Zeitdilatation:

Uhren, die in Σ ruhen, erscheinen in Σ' langsamer.

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \Delta t' &= \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \underbrace{\Delta x}_{=0} \right) = \gamma \Delta t > \Delta t \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{"Eigenzeit" in } \Sigma \end{aligned}$$

Bemerkung: Um $\Delta t'$ zu messen braucht es zwei synchronisierte Uhren in Σ' .

Anwendungen:

- (1) Schwerionen in Teilchenbeschleunigern müssen als "Pfannkuchen" beschrieben werden
- (2) Ohne Zeitdilatation könnten Myonen (Zerfallszeit $\tau \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$) die Erdoberfläche nicht erreichen: $c\tau \approx 600 \text{ m}$
- (3) Direkter Nachweis der Zeitdilatation: Hafele-Keating-Experiment
- (4) Relativitätstheorie begründet keinen Relativismus
(Grundlage: Universalität der Lichtgeschwindigkeit)