Ultrakalte Gase als Quantensimulatoren

Christoph Berke

Prof. Matthias Vojta

02.07.2014

Ultrakalte Gase als Quantensimulatoren - Übersicht

Motivation

Ziel

Vielteilchen-System simulieren/berechnen

klassische Computer ungeeignet

- Speicherplatz $\propto e^N$

Beispiel

- Wellenfunktion eines N_2-Moleküls speichern
- 2 Kerne, 14 Elektronen, 2 Spinzustände pro Elektron
- 3 Raumdimensionen, 100 Punkte pro Raumrichtung
- Anzahl der komplexen Zahlen, die abgespeichert werden müssen: $2^{14} \cdot 100^{3(14+2)} \approx 10^{100}$
- Alle Zahlen auf handelsüblichen 1 TB-Festplatten abspeichern

Motivation

Ziel

Vielteilchen-System simulieren/berechnen

klassische Computer ungeeignet

- Speicherplatz $\propto e^N$

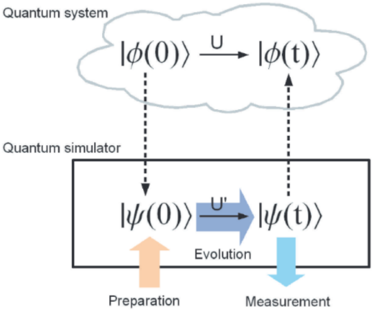
Beispiel

- Wellenfunktion eines N_2-Moleküls speichern
- 2 Kerne, 14 Elektronen, 2 Spinzustände pro Elektron
- 3 Raumdimensionen, 100 Punkte pro Raumrichtung
- Anzahl der komplexen Zahlen, die abgespeichert werden müssen: $2^{14} \cdot 100^{3(14+2)} \approx 10^{100}$
- Alle Zahlen auf handelsüblichen 1 TB-Festplatten abspeichern
- Würfellänge: 10^{10} Lichtjahre

möglicher Ausweg:

Quantensimulator

Kontrollierbares Quantensystem, das genutzt wird, um ein anderes Quantensystem nachzuahmen



- $|\psi(0)\rangle$ preparieren
- Zeitentwicklung durchführen
- $|\psi(t)\rangle$ messen
- Zusammenhang zwischen $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$

Digitale Quantensimulation
(DQS)

- Idee: Zeitentwicklung des Systems in Folge von 1- und 2-qubit-Gates zerlegen
- diskrete Zeitentwicklung
- universeller als AQS
- Langfristiges Ziel

Digitale und analoge Quantensimulation

Digitale Quantensimulation (DQS)

- Idee: Zeitentwicklung des Systems in Folge von 1- und 2-qubit-Gates zerlegen
- diskrete Zeitentwicklung
- universeller als AQS
- Langfristiges Ziel

Analoge Quantensimulation (AQS)

- kontrollierbares Quantensystem
- „. . . there is to be an exact simulation, that the computer will do exactly the same as nature “(R. Feynman)
- $\mathcal{H}_{\mathsf{Sys}} \leftrightarrow \mathcal{H}_{\mathsf{Sim}}$
- Prominentes Beispiel: Bose-Hubbard-Hamiltonian mit Atomen im Gitter

Ziel

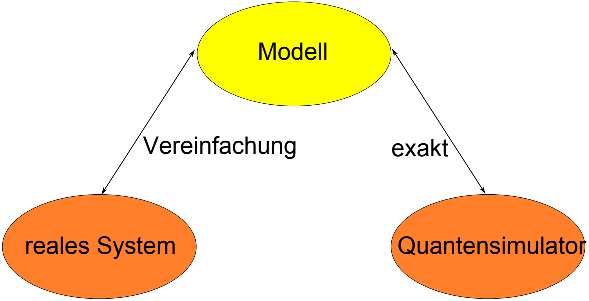
System mit Hamiltonian $\mathcal{H}_{\mathsf{Sim}}$ „bauen“

Beispiel (Gerritsma *et al.* (2011))

- Dirac-Gleichung für Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen: $i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = (cp\sigma_x + mc^2\sigma_z)\phi$
- Experimente mit gefangenen Ionen und bichromatischen Lichtquellen: $\mathcal{H}_I = \alpha\sigma_x p + \beta\sigma_z$

- Was kann als Simulator dienen?
  - Rydberg-Atome, Ionen, Photonen....
  - ultrakalte Gase
- Was kann simuliert werden?
  - Anwendung in allen Bereichen der Physik
  - Hubbard-Modell, Spin-Modelle, Quantenphasenübergänge, Frustrierte Systeme, Supraleiter, BEC-BCS-Crossover, fraktionaler Quanten-Hall-Effekt . . .
  - exotisch: Ausdehnung des Universums nach dem Urknall mit 2-komponentigem BEC (Fischer, Schützold, 2004)

- Quantensimulatoren nützlich wenn
  - Problem über klassische Computer nicht zugänglich
  - System experimentell nicht zugänglich
- Quantensimulatoren können physikalische Modelle testen



- Beispiel: Hochtemperatursupraleiter, Neutronenstern

Ultrakalte Gase in optischen Gittern als Quantensimulatoren

- Kontrolle vieler Teilchen gleichzeitig
- Kontrollierbar sind zum Beispiel...
  - Gittergeometrie und Dimensionalität
  - Tunnelprozesse
  - on-site Wechselwirkungen $\rightarrow$ Feshbach-Resonanzen
  - Nächste-Nachbar-Wechselwirkungen
  - Drei-Teilchen-Wechselwirkungen
  - langreichweitige Wechselwirkungen
  - externe Potentiale
  - Rabi-Übergänge
  - Temperatur

$\Longrightarrow$ sehr viele verschiedene $\mathcal{H}$ modellierbar

1. Beispiel - Ising-Modell mit Magnetfeld

- $\mathcal{H}_{\text{Ising}} = J \sum_i S_z^i S_z^{i+1} - h_z^i S_z^i - h_x^i S_x^i$
- 1D-Kette wechselwirkender Spins in Magnetfeld durch Bose-Gas aus Rubidium-Atomen simulieren
- Speziell: Phasenübergang zwischen para- und antiferromagnetischem Grundzustand nachstellen

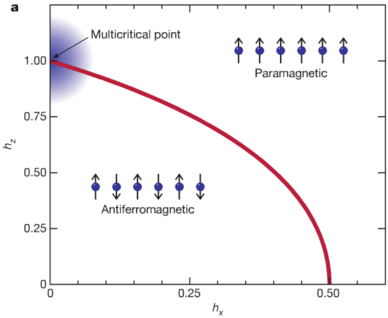


Abbildung: Phasendiagramm des Spin-Modells

Ziel (Sachdev *et al.* 2002)

$\mathcal{H}_{\text{Ising}} \overset{?}{\Longleftrightarrow} \mathcal{H}_{\text{Lat}}$

- Ausgangspunkt: 1-dimensionaler Bose-Hubbard-Hamiltonian in einem verkippten Gitter:

$$\mathcal{H}_{\text{Lat}} = -t \sum_j \left(a_j^\dagger a_{j+1} + a_j a_{j+1}^\dagger \right) + \frac{U}{2} \sum_j n_j(n_j - 1) - E \sum_j j n_j$$

  - U = on-site-Teilchenwechselwirkung
  - E = Potentialunterschied zwischen nächster-Nachbar-Potentialmulden
  - t = Tunnelenergie

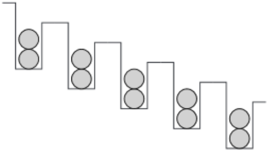


Abbildung: Ausgangssituation: Mott-Isolator mit $n_0 = 2$

- Experiment: $E = 0 \dots U, \quad t << U$

Welche Zustände können auf experimentellen Zeitskalen erreicht werden?
$\longrightarrow$ Zustände mit gleicher Energie, wenn $E \approx U$. (*Resonante Kopplung an Mott-Zustand*)

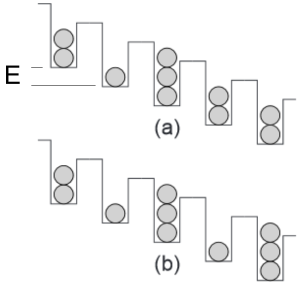


ABBILDUNG: Zwei resonant an Mott-Isolator gekoppelte Zustände (Dipole) ($\propto t$).

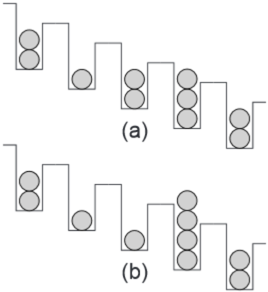


ABBILDUNG: Zustände, die nicht resonant an Mott-Isolator gekoppelt sind ($\propto t^2/U$).

- Experiment: $E = 0 \ldots U, \quad t << U$

Welche Zustände können auf experimentellen Zeitskalen erreicht werden?
$\longrightarrow$ Zustände mit gleicher Energie, wenn $E \approx U$. (*Resonante Kopplung an Mott-Zustand*)

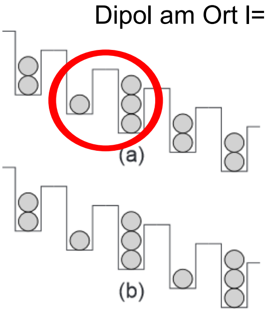


Abbildung: Zwei resonant an Mott-Isolator gekoppelte Zustände (Dipole) ($\propto t$).

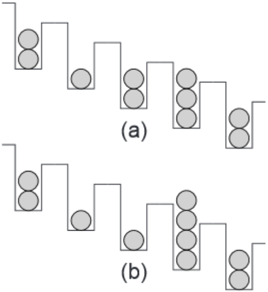


Abbildung: Zustände, die nicht resonant an Mott-Isolator gekoppelt sind ($\propto t^2/U$).

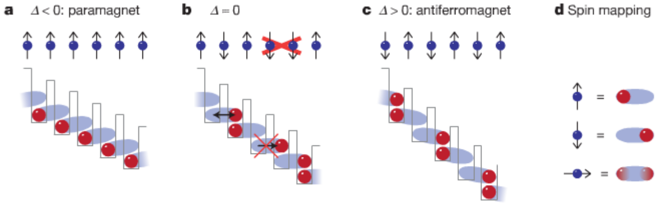


ABBILDUNG: Überblick

sinnvolle Definitionen:

- Dipol-Vakuum: $|0\rangle = |Mn_0\rangle$
- Dipol-Erzeuger: $d_l^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_0(n_0+1)}} b_l b_{l+1}^\dagger |Mn_0\rangle$
- Nebenbedingungen: $d_l^\dagger d_l \leq 1$ und $d_l^\dagger d_l d_{l+1}^\dagger d_{l+1} = 0$

Dipol-Hamiltonian:

$$\mathcal{H}_d = -t\sqrt{n_0(n_0+1)} \sum_l (d_l + d_l^\dagger) + (U - E) \sum_l d_l^\dagger d_l$$

Zusammenhang zur Spinkette:

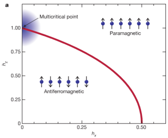
- Dipol an Platz l $\equiv$ Down-Spin S_l^z
- kein Dipol an Platz l $\equiv$ Up-Spin S_l^z

$$\longrightarrow \quad S_z^j = \frac{1}{2} - d_j^\dagger d_j \quad \text{und} \quad S_x^j = \frac{1}{2}(d_j^\dagger + d_j)$$

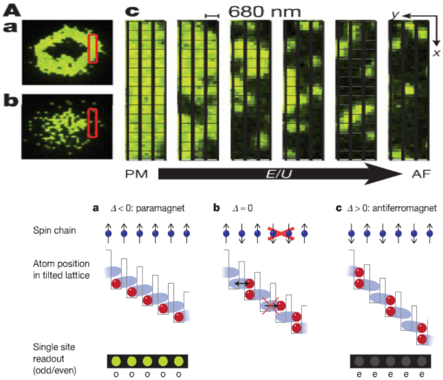
Nebenbedingung implementieren:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{Ising}} &= \mathcal{H}_d + J d_l^\dagger d_l d_{l+1}^\dagger d_{l+1} \\
&= \mathcal{H}_d + J(S_z^{j+1} - \frac{1}{2})(S_z^j - \frac{1}{2}) \\
\mathcal{H}_{\text{Ising}} &= \sum_j (J S_z^j S_z^{j+1} - 2^{\frac{3}{2}} t S_x^j - (J - (E - U)) S_z^j) \\
&= J \sum_j (S_z^j S_z^{j+1} - h_x S_x^j - h_z S_z^j)
\end{aligned}$$

Terme aus Nebenbedingung



Das Experiment (Simon *et al.* 2011)



- unabhängige Ketten in x-Richtung
- Magnetischer Potentialgradient zur Verkippung des Gitters
- $E = 0,7U \ldots 1,2U$
- *in situ*-Messung $\rightarrow$ Quanten-Gas-Mikroskop
    - 1 Atom $\equiv$ hell
    - 0 Atome oder 2 Atome $\equiv$ dunkel

2. Beispiel - künstliche Magnetfelder

Ausgangsfrage

Kann man mit ultrakalten Atomen geladenen Vielteilchen-Systeme simulieren?

- interessant z.B. für Elektronen in einem äußeren Magnetfeld
  $\longrightarrow$ Quanten-Hall-Effekt
- speziell: Hofstadter-Butterfly (Jaksch, Zoller, 2003)
  - Elektronen im tight-binding-Modell im homogenen Magnetfeld
  - quadratisches 2 dimensionales Gitter

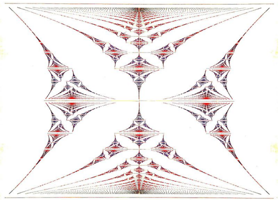
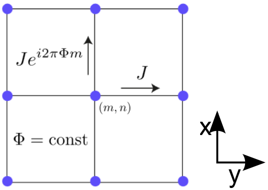


Abbildung: Hofstadter-Butterfly

Ziel

$\mathcal{H}_\text{B} \overset{?}{\Longleftrightarrow} \mathcal{H}_\text{Lat}$

- Bloch-Energie: $W(\vec{k}) = -2t(\cos(k_x a) + \cos(k_y a))$
- Peierls-Substitution: $\hbar\vec{k} \to \vec{p} - \frac{e}{c\hbar}\vec{A}$ mit $\vec{A} = (By, 0, 0)$
- In zweiter Quantisierung:
  $\mathcal{H}_\text{B} = -t \sum_{m,n} (e^{2\pi i \alpha m} a^\dagger_{n+1,m} a_{n,m} + a^\dagger_{n,m} a_{n,m+1} + h.c.)$
- $\alpha = \frac{a^2 eB}{2\pi\hbar}$ Fluss durch die Einheitszelle



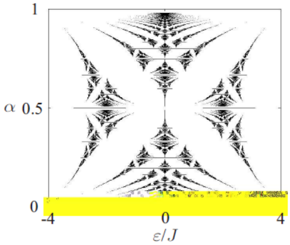


Abbildung: Das Hofstadter-Modell

- Zwei-Niveau-Atome, Grundzustand g, angeregter Zustand e
- „state-dependent lattice “
  - magische Wellenlängen in y-Richtung
  - antimagische Wellenlänge in x-Richtung

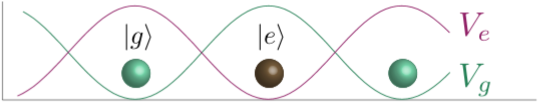


ABBILDUNG: state-dependent lattice

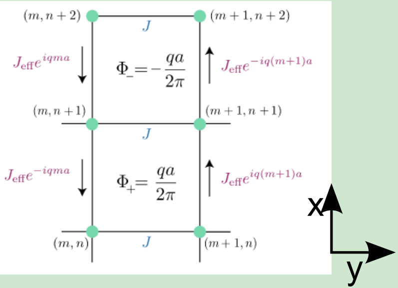
- „normales “ Tunneln in y-Richtung
- Laser-induziertes Tunneln in x-Richtung
- Resonanter Laser: $\Omega e^{i\vec{k}\vec{r}}$
- Hopping-Matrix-Element:
  $g, \vec{r}^{(g)} = (2n, m) \rightarrow e, \vec{r}^{(e)} = \vec{r}^{(g)} + \vec{b} = (2n+1, m)$:

$$J = \frac{1}{2}\Omega e^{i\vec{k}\vec{r}^{(g)}} \int w^{(e)}(\vec{r} - \vec{b})^* w^{(g)}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^2 r$$

- Für Laser in yz-Ebene: $J = J_{eff} e^{2\pi i \alpha m}$ mit $\alpha = \frac{k_y a}{2\pi}$

Beispiel

- Betrachte untere Einheitszelle: $\phi = 0 + k_y(m+1)a + 0 - k_y ma = k_y a$
- Betrachtete obere Einheitszelle:
  $\phi = 0 - k_y(m+1)a + 0 + k_y ma = -k_y a$
- alternierendes Magnetfeld
- ↯ (zu Hoffstadter-Modell)



- Ausweg: Übergänge $2n \leftrightarrow 2n+1$ und $2n-1 \leftrightarrow 2n$ unabhängig machen
- linearer Potentialgradient: Benachbarte Potentialmulden mit Energieunterschied Δ

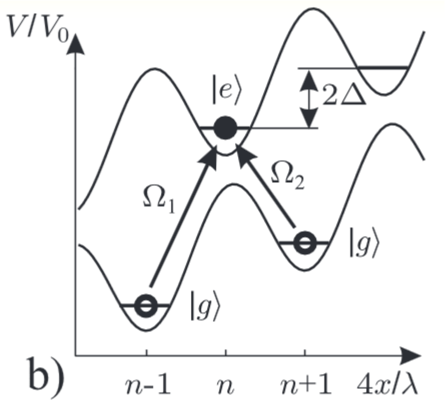


ABBILDUNG: Neue Potentiallandschaft

- Ω_2 induziert Übergang e $\leftrightarrow$ g
  Detuning: $-\Delta$
- Ω_1 induziert Übergang g $\leftrightarrow$ e
  Detuning: $+\Delta$
- $\Omega_{1/2} = \Omega e^{\pm i k_y y}$
- Resultat: Das „-" vom Übergang e$\rightarrow$g und das „-" vom Laser $\propto e^{-i k_y y}$ kompensieren sich

- Vernachlässige alle Wechselwirkungsterme
- $J_{eff} = J_y = J$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{Lat}} = J \sum_{m,n} \left(e^{2\pi i \alpha m} a^{\dagger}_{n+1,m} a_{n,m} + a^{\dagger}_{n,m} a_{n,m+1} + h.c. \right)$$

- $\alpha = \frac{k_y a}{2\pi}$ variierbar über
  - Gitterlänge a
  - Winkel von $\vec{k}$ relativ zur $z-$Achse
  - einen Bereich von $B_{\mathrm{eff}} = 0, \ldots, 10^4$ T!
- einfache Erweiterung, z.B. zusätzliche E-Felder
- experimentelle Realisierung: Aidelsburger *et al.* 2013

Symmetriebrechung und Magnetfelder

- Magnetfeld B bricht Zeitumkehrinvarianz
- Ursprüngliche Konfiguration bricht diese Symmetrie nicht:
  - Laser propagiert in andere Richtung: $e^{i\vec{k}\vec{r}} \rightarrow e^{-i\vec{k}\vec{r}}$
  - Translation in x-Richtung eine Gitterkonstante

  $\longrightarrow$ ursprüngliches System
- Deshalb: Zusätzlicher Term benötigt um Translationssymmetrie zu brechen

Fazit

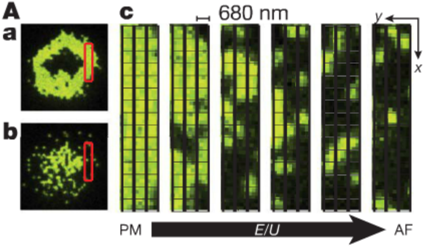
- Quantengase zur Simulation anderer Systeme sehr gut geeignet
- nächste Etappe: über proof-of-principle-Experimente hinausgehen
- teilweise schon erreicht
  - Beispiel: I.Bloch *et al.* 2011

Danke für die Aufmerksamkeit!

Quellen

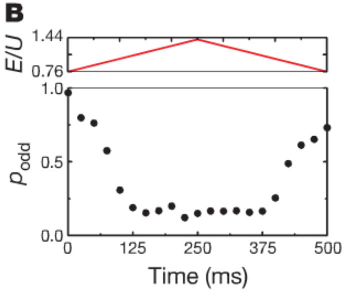
- I. M. Georgescu, S. Ashab, and F. Nori, Quantum Simulation, http://arxiv.org/abs/1308.6253
- I. Buluta, F. Nori, Quantum Simulators, Science, 326 (2009)
- I. Bloch, J.Dallibard, S. Nascimbène, Quantum simulation with ultracold quantum gases, Nature Physics, 8 (2012)
- J. Cirac, P. Zoller, Goals and opportunities in quantum simulation
- M. Lewenstein *et al.*, Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond, http://arxiv.org/abs/cond-mat/0606771
- S. Sachdev, K. Sengupta, S.M. Girvin, Mott insulators in strong electric fields, http://arxiv.org/abs/cond-mat/0205169
- J. Simon *et al.*, Quantum simulation of antiferromagnetic spin chains in an optical lattice, Nature, 472 (2011)
- D. Jaksch, P. Zoller, Creation of effective magnetic fields in optical lattices: The Hoffstadter butterfly for cold neutral atoms, http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0304038.pdf
- N. Goldman *et al.*, Review: Light-induced gauge fields for ultracold atoms, http://homepages .ulb.ac.bengoldman/
- J. Dalibard *et al.*, Colloquium: Artificial gauge potentials for neutral atoms, http://arxiv.org/pdf/1008.5378.pdf

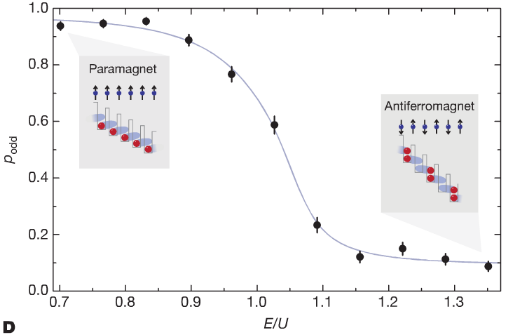
Das Experiment (Simon *et al.* 2011)



- 2D-Mott-Isolator aus ^{87}Rb-Atomen
- Gitterplatzabstand 680 nm, Potentialtiefe $35E_r$
- Gitter verkippen: $0,7U$ (magn. Feldgradienten)

- Potentialtiefe entlang der Kette: $14E_r$
- Potentialtiefe transversal zur Kette: $45E_r$ $\rightarrow$ unabhängige Ketten
- lineare Steigerung der Gradientenstärke bis 1,2 U innerhalb von 250 ms
- *in situ*-Messung möglich $\longrightarrow$ Quanten-Gas-Mikroskop
    - 1 Atom $\equiv$ hell
    - 0 Atome oder 2 Atome $\equiv$ dunkel





Zusammenhang zwischen $\langle S_z^i \rangle$ und Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl Atome zu finden:

$$\overline{\langle S_z^i \rangle} = \frac{1}{2} p_{odd} \quad (1)$$

- Hamiltonoperator des Lasers:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathsf{Las}} &= \sum_{m,n\ even} \underbrace{J_{m,n}}_{\int \dots e^{+ik_y y}\dots} \cdots + \sum_{m,n\ odd} \underbrace{J_{m,n}}_{\int \dots \left(e^{-ik_y y}\right)^* \dots} \cdots + \mathcal{H}_{\mathsf{d}} \\ &= \sum_{m,n} \left(J_{eff}\, e^{2\pi i\alpha m} a^\dagger_{n+1,m} a_{n,m} + h.c. \right) + \mathcal{H}_{\mathsf{d}}\end{aligned}$$

- $\mathcal{H}_{\mathsf{d}}$ beschriebt Detuning:

$$\mathcal{H}_{\mathsf{d}} = -\Delta \sum_{n,m} n a^\dagger_{n,m} a_{n,m}$$

- $\mathcal{H}_{acc} = \Delta \sum_{n,m} n a^\dagger_{n,m} a_{n,m}$
- Vernachlässige alle Wechselwirkungsterme, $J_{eff} = J_y = J$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathsf{Lat}} &= \mathcal{H}_{\mathsf{Las}} + \mathcal{H}_{\mathsf{acc}} + \sum_{n,m} J a^\dagger_{n,m} a_{n,m+1} + h.c. \\ &= J \sum_{m,n} \left(e^{2\pi i\alpha m} a^\dagger_{n+1,m} a_{n,m} + a^\dagger_{n,m} a_{n,m+1} + h.c. \right)\end{aligned}$$