5. Homogenitäts- und Universalitätshypothese

5.1 Homogenitätshypothese und Skalengesetze

Ziel: Wollen beweisen, dass unter Voraussetzung bestimmter Annahmen, die für räumlich homogene Systeme gelten sollen, für die Beziehungen zwischen den kritischen Exponenten (siehe Kapitel 1.6.2) Gleichungen (anstelle von Ungleichungen) gelten.

Annahme:

Der am PÜ-Punkt singuläre Anteil der freien Enthalpiedichte ist eine *verallgemeinerte homogene* Funktion der Argumente t und h

$$\boldsymbol{g(t,h) = \lambda^{-n}\, g\left(\lambda^{\Delta_t} t, \lambda^{\Delta_h} h\right)} \ , \qquad (1)$$

wobei λ ein beliebiger Faktor ist und Δ_t , Δ_h vom konkreten Modell abhängige (noch unbestimmte) **Exponenten sind.**

Homogenitätshypothese oder auch **Skalenhypothese** (Widom, 1965)

Zusammenhang zwischen n, Δ_t , Δ_h und den kritischen Exponenten:

(i) Differentiation von (1) nach *h* ⇝ **Magnetisierung** (pro Volumen oder pro Spin)

$$m(t,h) = \lambda^{-n+\Delta_h}\, m\left(\lambda^{\Delta_t} t, \lambda^{\Delta_h} h\right) \qquad (2)$$

Für $h = 0$ und $T \to T_c^-$ folgt mit $m(t,0) \sim (-t)^\beta$: $(-t)^\beta = \lambda^{-n+\Delta_h}(-\lambda^{\Delta_t} t)^\beta$

Da λ beliebig ist, muss gelten $\boldsymbol{\Delta_t \beta = n - \Delta_h}$ (3)

Für $t = 0$ (entlang der kritischen Isotherme) folgt aus (2) $m(0,h) = \lambda^{-n+\Delta_h}\, m\big(0, \lambda^{\Delta_h} h\big)$

und unter Berücksichtigung von $h \sim m^\delta$: $h^{1/\delta} = \lambda^{-n+\Delta_h}(\lambda^{\Delta_h} h)^{1/\delta}$

Da $\boldsymbol{\lambda}$ beliebig ist, muss gelten $\boldsymbol{\Delta_h/\delta = n - \Delta_h}$ (4)

(ii) Zweimalige Differentiation von (1) nach *h* ⇝ is**otherme Suszeptibilität**

$$\left.\frac{\partial^2 g}{\partial h^2}\right|_t = \lambda^{-n+2\Delta_h} \frac{\partial^2 g\big(\lambda^{\Delta_t} t, \lambda^{\Delta_h} h\big)}{\partial (\lambda^{\Delta_h} h)^2} \Rightarrow \chi(t,h) = \lambda^{-n+2\Delta_h} \chi\big(\lambda^{\Delta_t} t, \lambda^{\Delta_h} h\big)$$

Für $h = 0$ und $T \to T_c^+$ folgt mit $\chi_T \sim t^{-\gamma}$: $\lambda^{n-2\Delta_\mathrm{h}} t^{-\gamma} = (\lambda^{\Delta_t} t)^{-\gamma}$

Da λ beliebig ist, muss gelten $\boldsymbol{-\gamma \Delta_t = n - 2\Delta_h}$ (5)

Analog folgt für $T \to T_c^-$ $\boldsymbol{-\gamma' \Delta_t = n - 2\Delta_h}$ (5‘)

(iii) Zweimalige Differentiation von (1) nach t $\rightsquigarrow$ **spezifische Wärmekapazität**

$$\left.\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right|_h = \lambda^{-n+2\Delta_t} \frac{\partial^2 g\left(\lambda^{\Delta_t} t, \lambda^{\Delta_h} h\right)}{\partial(\lambda^{\Delta_t} t)^2} \Rightarrow c_h(t,h) = \lambda^{-n+2\Delta_t} c_h\left(\lambda^{\Delta_t} t, \lambda^{\Delta_h} h\right)$$

Für $h = 0$ und $T \to T_c^+$ folgt mit $c_{h=0} \sim t^{-\alpha}$: $t^{-\alpha} = \lambda^{-n+2\Delta_t}(\lambda^{\Delta_t} t)^{-\alpha}$

Da λ beliebig ist, muss gelten $\boldsymbol{-\alpha\Delta_t = n - 2\Delta_t}$ (6)

Analog folgt für $T \to T_c^-$ $\boldsymbol{-\alpha'\Delta_t = n - 2\Delta_t}$ (6')

Aus den Gleichungen (3) bis (6) folgt:

$\boldsymbol{\alpha = \alpha'}$, $\boldsymbol{\gamma = \gamma'}$, $\boldsymbol{\alpha + \gamma + 2\beta = 2}$ (**Rushbrooke Identität**, vorher aus TD $\geq$)

$\boldsymbol{\gamma = \beta(\delta - 1)}$ (**Widom Identität**, vorher aus TD $\geq$)

Neben den Beziehungen zwischen den kritischen Exponenten folgen aus der Homogenitätshypothese auch Hinweise auf die Form der Zustandsgleichung:

Allgemein gilt für die (thermische) Zustandsgleichung eines magnetischen Systems

$$h = f(t, m) \qquad \text{(vergl. } p = p(T, V/N)\text{)}$$

Aus der Homogenitätshypothese folgt (2) $m\left(\lambda^{\Delta_t} t, \lambda^{\Delta_h} h\right) = \lambda^{n-\Delta_\mathrm{h}} m(t, h)$ und damit

$$\lambda^{\Delta_h} h(t, m) = f(\lambda^{\Delta_\mathrm{t}} t, \lambda^{n-\Delta_\mathrm{h}} m)$$

λ ist frei wählbar, mit der speziellen Wahl $\lambda = |t|^{-1/\Delta_t}$ gilt damit

$$h(t, m) = \lambda^{-\Delta_h} f\left(\lambda^{\Delta_\mathrm{t}} t, \lambda^{n-\Delta_\mathrm{h}} m\right) = |t|^{\frac{\Delta_h}{\Delta_t}} f\left(\frac{t}{|t|}, |t|^{\frac{-(n-\Delta_h)}{\Delta_t}} m\right) = |t|^{\frac{\Delta_h}{\Delta_t}} f\left(\operatorname{sgn}(t), |t|^{\frac{-(n-\Delta_h)}{\Delta_t}} m\right)$$

$$\equiv |t|^{\frac{\Delta_h}{\Delta_t}} f_\pm\left(|t|^{\frac{-(n-\Delta_h)}{\Delta_t}} m\right)$$

Ersetzen der Exponenten:

Aus Gleichung (3) folgt $\frac{n-\Delta_h}{\Delta_t} = \beta$ und aus (3) – (5): $\beta + \gamma = \frac{n-\Delta_h}{\Delta_t} - \frac{n-2\Delta_h}{\Delta_t} = \frac{\Delta_h}{\Delta_t}$.

Damit gilt

$$\boldsymbol{h = |t|^{\beta+\gamma} f_{\pm}\left(\frac{m}{|t|^{\beta}}\right)}$$

Die Magnetisierung geteilt durch $|t|^{\beta}$ ist damit eine Funktion von $h/|t|^{\beta+\gamma}$ und **nicht** eine Funktion von *h* und *t* einzeln!

Die Funktion $f\left(\frac{M}{|t|^{\beta}}\right)$ kann verschieden für $t > 0 \;\; (\curvearrowright f_{+})$ und $t < 0 \;\; (\curvearrowright f_{-})$ sein.

Analog erhält man

$$\boldsymbol{h = m|m|^{\delta-1} f\left(\frac{t}{|m|^{1/\beta}}\right)}$$

(hier aus Symmetriegründen nur verschiedene Vorzeichen statt $f_{\pm}$)

Das Skalenverhalten der Zustandsgleichung wurde für einige Systeme mit großer Präzision überprüft.

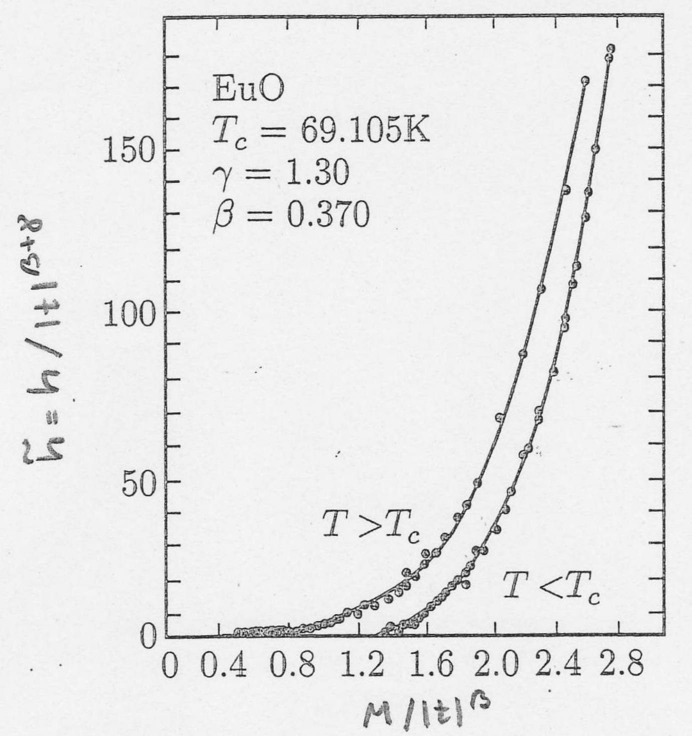

Fig. Experimental equation of state near the ferromagnetic critical point of EuO [Cheng-Cher Huang and John T. Ho, *Phys. Rev. B* 12, 5255 (1975)].

„data collapsing“: Statt einer Kurvenschar $h(T, M)$, aufgetragen für viele Werte von T, erhält man oberhalb und unterhalb von T_c nur je eine Kurve, wenn man die Datenpunkte $y \equiv h(T, M)/|t|^{\beta+\gamma}$ über den zugehörigen Variablen $x \equiv M/|t|^\beta$ aufträgt.