5.3. Kadanoff-Konstruktion

- Heuristische Begründung für Skalenhypothese
- (pädagogisch) einfachster Zugang zur Renormierungsgruppentheorie

Ausgangspunkt: Korrelationslänge divergiert am kritischen Punkt, $\xi(T) \xrightarrow[T\to T_\mathrm{c}]{} \infty$

$\Longrightarrow$ räumliche Ausdehnung der Fluktuationen wird für $T \to T_\mathrm{c}$ sehr groß, nahe T_c sind Fluktuationen auf allen Längenskalen vorhanden

$\Longrightarrow$ System wird unempfindlich gegen Längentransformationen (***Skaleninvarianz***)

Argumentation von **Leo Kadanoff** am Beispiel des **Ising-Modells** (***Blockspin-Transformation***)

$$\widetilde{H} \equiv -\beta H = +\tilde{J} \sum_{<i,j>} \sigma_i \sigma_j + \tilde{h} \sum_i \sigma_i \quad \text{mit} \quad \sigma_i = \pm 1,\ \tilde{J} \equiv J/k_\mathrm{B}T,\ \tilde{h} \equiv h/k_\mathrm{B}T$$

(schreiben Kopplungskonstanten zweckmäßigerweise um, da H in Zustandssumme nur in der Form βH)

1. Schritt

Teilen das (Ausgangs-) Ising-Gitter mit der Gitterkonstante a in Blöcke, in denen sich λ^d Einzelspins befinden (d = Dimension des Gitters, $a < \lambda a \ll \xi$).

2. Schritt

Ersetzen die λ^d Spins innerhalb eines jeden Blocks durch einen Blockspin σ'_α
(mit $\alpha = 1, \ldots, n$, wobei $n =$ Zahl der Blöcke).

Annahme: Blockspins σ'_α verhalten sich wie ursprüngliche Ising-Spins σ_i (nur 2 Einstellmöglichkeiten**!**):

$$\sigma'_\alpha = \frac{1}{\lambda^d} \sum_{i \epsilon \alpha} \sigma_i \approx \pm 1$$

(Annahme sinnvoll, da für $\lambda a \ll \xi$ fast alle Spins innerhalb eines Blockes das gleiche Vorzeichen haben)

Annahme: Hamilton-Funktion für das Blockspinsystem mit der Gitterkonstante λa besitzt dieselbe Gestalt wie die Hamilton-Funktion für das Ausgangssystem, allerdings mit veränderten Kopplungskonstanten.

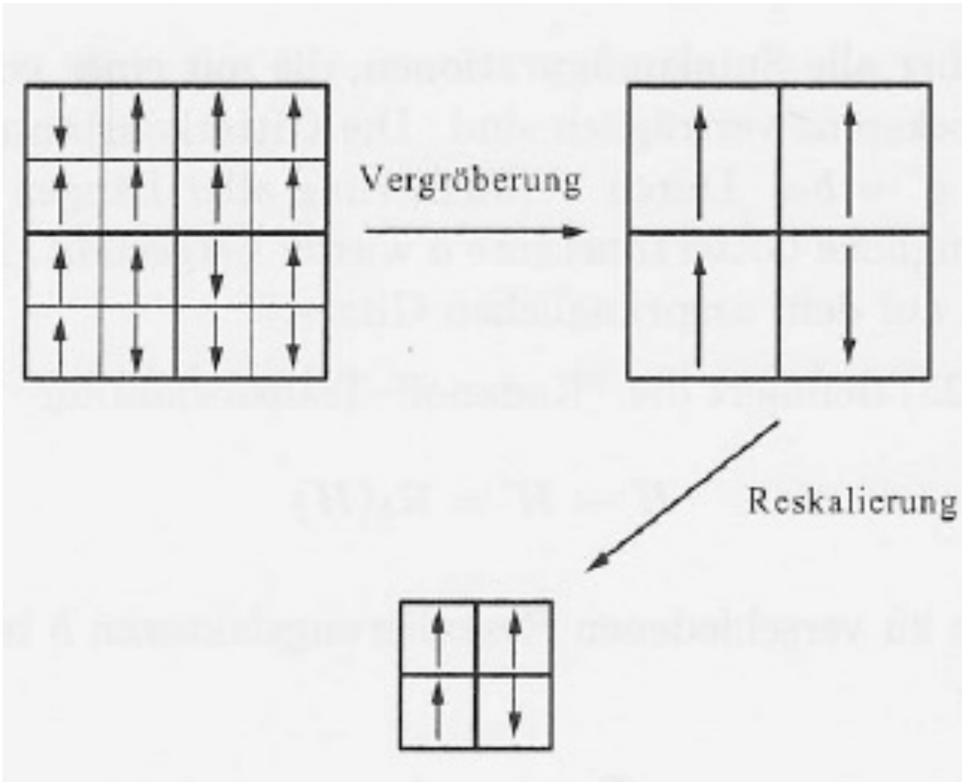
$$\tilde{\boldsymbol{H}}' = +\tilde{\boldsymbol{J}}' \sum_{<\alpha,\alpha'>} \sigma'_\alpha \sigma'_{\alpha'} + \tilde{\boldsymbol{h}}' \sum_\alpha \sigma'_\alpha \qquad (1)$$

(Annahme sinnvoll, da man sich für $T \to T_c$ wegen $\xi \to \infty$ das Ising-System in gleicher Weise aus Clustern korrelierter Einzelspins zusammengesetzt denken kann, wie aus Clustern korrelierter Blockspins

3. Schritt

„Rückkehr“ zum Ausgangssystem durch Division aller Längen durch λ.

Hintergrund: Durch Blockbildung (Körnerbildung) wurde die Auflösung geändert. Blockbild ist gröber als das Original. Die ursprüngliche Auflösung kann wieder hergestellt werden, indem alle Längen um den Faktor λ gekürzt werden ($r' = r/\lambda$).



Blockeinteilung eines 2-dimensionalen Ising-Modells für $\boldsymbol{\lambda = 2}$ nach Kadanoff

Zweck der Kadanoff Prozedur:

- Eine „coarse graining"-Prozedur wird so ausgeführt, dass die Zahl der Freiheitsgrade des Systems schrittweise reduziert wird.
- Ein Vergleich des Blockspinsystems mit dem ursprünglichen Spinsystem erlaubt uns Rückschlüsse über das Verhalten des Systems selbst dann, wenn wir weder das Spinsystem selbst noch das Blockspinsystem exakt lösen können.

Wenn man übergeht von den Variablen $\tilde{J} = J/k_\mathrm{B}T$ und $\tilde{h} = h/k_\mathrm{B}T$ zu den Variablen $t \equiv (T - T_\mathrm{c})/T_\mathrm{c}$ und h, dann sollte wegen (1) gelten

$$\underbrace{g(t', h')}_{\substack{\text{freie Enthalpie} \\ \textbf{pro Block}}} = \underbrace{\lambda^d}_{\substack{\text{Zahl der Gitter–} \\ \text{plätze pro Block}}} \cdot \underbrace{g(t, h)}_{\substack{\text{freie Enthalpie} \\ \textbf{pro Gitterplatz}}}$$

Benötigen noch Zusammenhang zwischen h' und h bzw zwischen t' und t !

(i) Da t', h' die Wechselwirkung zwischen Blöcken bzw. zwischen den Blöcken und dem äußeren Feld charakterisieren, sollten t', h' von der Blockgröße λ abhängig sein.

(ii) Falls $h \to 0$, sollte auch $h' \to 0$ gelten $\Longrightarrow h' \sim h$

(i)+(ii) $\Longrightarrow h' = H(\lambda) \cdot h$ (Proportionalitätsfaktor sollte eine Funktion von λ sein)

Sinnvolle Annahme: $H(\lambda) = \lambda^{\Delta_h}$ Potenzfunktion erfüllt Bedingung, dass für 2 nacheinander-folgende Transformationen gelten sollte $H(\lambda_1) \cdot H(\lambda_2) = H(\lambda_1 \cdot \lambda_2)$

(iii) Da für $t \to 0$ auch $t' \to 0$ gelten sollte (am kritischen Punkt $t = t' = 0$)

$\Longrightarrow t' = T(\lambda) \cdot t = \lambda^{\Delta_t} \cdot t$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{g\left(\lambda^{\Delta_t} t, \lambda^{\Delta_h} h\right) = \lambda^d g(t, h)}$$

entspricht **Homogenitätshypothese (Skalenhypothese) von Widom**
(mit $n = d$)

$\Longrightarrow$ physikalische Begründung, dass der (singuläre) Anteil der freien Enthalpie (pro Einheitsvolumen) eine *verallgemeinerte homogene* Funktion ist

$\Longrightarrow$ Rushbrooke- und Widom-Identität für kritische Exponenten