6.2.2 Migdal-Kadanoff-Transformation („Bond-Moving Technique”)

- Clevere (wenn auch ziemlich unkontrollierte) Näherungsmethode der RG-Theorie im Ortsraum
- Anwendbar für höher dimensionale Systeme ($d \geq 2$)
- Idee: langreichweitiges Verhalten des Systems sollte sich nicht ändern, wenn wir einige Bindungen verschieben

Beispiel: quadratisches Ising-Gitter

1. Jede zweite vertikale Bindung $\tilde{J}$ wird nach links verschoben und mit der benachbarten Bindung zusammengefasst ➞ neue vertikale Kopplungssstärke $2\tilde{J}$
2. Jede zweite horizontale Bindung $\tilde{J}$ wird nach oben verschoben und mit der benachbarten Bindung zusammengefasst ➞ neue horizontale Kopplungssstärke $2\tilde{J}$
3. Spins im Zentrum der neuen Elementarzelle mit $a' = 2a$ sind abgekoppelt ➞ sind irrelevant
4. Jeder Spin der neuen Zelle wechselwirkt mit den anderen Spins mit der Kopplungssstärke $2\tilde{J}$
5. Über die Spins, die nur vertikal bzw. nur horizontal gekoppelt sind, wird absummiert (leicht möglich, da diese Spins wie im 1-dimensionalen Ising Modell nur 2 nächste Nachbarn besitzen). Es entstehen neue horizontale und vertikale Kopplungsstärken:

$$\tilde{J}' = \frac{1}{2} \ln\left(\cosh 4\tilde{J}\right) \quad , \; \tilde{h}' = \tilde{h}\left(1 + \tanh 4\tilde{J}\right)$$

(können Rekursionsformeln vom Dezimierungsverfahren aus Kap. 6.2.1 verwenden (siehe Übung Blatt 5 für $d = 1$ Ising-Modell, jetzt nur $\tilde{J} \rightarrow 2\tilde{J}$)

6. Erhalten aus $\tilde{J}' = \tilde{J}$ nicht-trivialen Fixpunkt bei $\tilde{J} = \frac{J}{k_\mathrm{B}T} = \mathbf{0.305} \equiv \boldsymbol{\tilde{J}_\mathrm{c}}$

(zum Vergl.: der exakte Wert ist $\tilde{J} = 0.441$).

Berechnung der kritischen Exponenten:

Es gilt $\tilde{J} = \tilde{J}_\mathrm{c} + (\tilde{J} - \tilde{J}_\mathrm{c}) \approx \tilde{J}_\mathrm{c}(1-t)$ und damit auch $\tilde{J}' \approx \tilde{J}_\mathrm{c}(1-t')$,

außerdem $\tilde{J}' = \frac{1}{2}\ln(\cosh 4\tilde{J}) \equiv \tilde{J}'(\tilde{J}) \approx \tilde{J}'(\tilde{J}_\mathrm{c}) + (\tilde{J} - \tilde{J}_\mathrm{c}) \cdot \frac{d\tilde{J}'}{d\tilde{J}}\Big|_{\tilde{J}=\tilde{J}_\mathrm{c}} = \tilde{J}_\mathrm{c} - \tilde{J}_\mathrm{c}\, t \cdot 2\tanh 4\tilde{J}_\mathrm{c}$.

$\rightarrow\ t' \approx t \cdot 2\tanh 4\tilde{J}_\mathrm{c} \approx 1.678 \cdot t = \lambda^{l_t} \cdot t = 2^{l_t} \cdot t \rightarrow l_t = 0.747$

$\rightarrow\ \nu = 1/l_t = 1.34$ (zum Vergleich: exakt $\nu = 1$, MFA $\nu = 0.5$)