1. Beweisen Sie, dass bei einem Phasenübergang zweiter Ordnung zwischen einer Phase a und einer Phase b für eine Zustandsänderung $(\mathrm{d}p, \mathrm{d}T)$ längs der Koexistenzlinie (falls es so eine gibt) die folgenden Gleichungen gelten

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{1}{Tv} \frac{c_p^{(a)} - c_p^{(b)}}{\alpha_p^{(a)} - \alpha_p^{(b)}} = \frac{\alpha_p^{(a)} - \alpha_p^{(b)}}{\kappa_T^{(a)} - \kappa_T^{(b)}} \, ,$$

wobei $\alpha_p^{(a,b)}$ die thermischen Ausdehnungskoeffizienten und $\kappa_T^{(a,b)}$ die isothermen Kompressibilitäten bezeichnen.

Anmerkung:
Die obigen Gleichungen, oft auch als Ehrenfestsche Gleichungen bezeichnet und gültig für Phasenübergänge zweiter Ordnung, sind das Analogon zur Clausius-Clapeyron-Gleichung, gültig für Phasenübergänge erster Ordnung.

2. Beweisen Sie die Griffiths-Ungleichung für die kritischen Exponenten (siehe Vorlesung):

$$\alpha' + \beta(1 + \delta) \geq 2 \, .$$

Hinweis:
Starten Sie mit der Gleichung

$$F(T_\mathrm{c}, M_1) = F(T_1, M_1) + \int_{T_1}^{T_\mathrm{c}} \mathrm{d}T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_M$$

(für $T_1 < T_\mathrm{c}$) und verwenden Sie die Stabilitätsbedingung $C_M \geq 0$.

3. Berechnen Sie mit Hilfe der Transfermatrix-Methode für das **1-dimensionale Ising-Modell** mit dem Hamiltonian

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

die Spin-Spin-Paarkorrelationsfunktion $g_2(ka) = \langle \delta\sigma_i \, \delta\sigma_{i+k} \rangle$, wobei a die Gitterkonstante bezeichnen soll. Zeigen Sie, dass im thermodynamischen Grenzfall gilt

$$g_2(ka) = \tanh^k(\beta J) \, .$$

4. Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabe 3 die Korrelationslänge ξ für das 1-dimensionale Ising-Modell (ohne Feld). Wie verhält sich ξ im Grenzfall hoher bzw. tiefer Temperaturen?