Fakultät Physik Wintersemester 2019/20
Institut für Theoretische Physik
Übungen zur Vorlesung Theorie der Phasenübergänge
PD Dr. D. Lehmann Blatt 2 (Übung 21.11.2019)

1. Berechnen Sie

   (i) für eine offene Ising-Kette der Länge N und

   (ii) für eine Ising-Kette der Länge N mit periodischen Randbedingungen

   die Zustandssumme Z_N ausgehend von der Entwicklung nach geschlossenen Graphen

$$Z_N = (\cosh \tilde{J})^{\mathcal{N}} 2^N \sum_{l=0}^{\mathcal{N}} n_l x^l$$

   (siehe Vorlesung).

2. Gegeben sei ein Ising-**Ferromagnet** (ohne äußeres Feld) mit dem Hamiltonian

$$\mathcal{H} = -J \sum_{<i,j>} \sigma_i \sigma_j \ .$$

   Die Zahl der nächsten Nachbarn sei z. Berechnen Sie in *Molekularfeldnäherung*

   (a) die freie Enthalpie $G(T, 0)$,

   (b) die Entropie $S(T, 0)$,

   (c) die Wärmekapazität $C_{h=0}(T)$.

   Bestimmen Sie den Sprung der Wärmekapazität am kritischen Punkt.

3. Der Hamiltonian

$$\mathcal{H} = +J \sum_{<i,j>} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

   stellt ein Modell für einen klassischen Ising-**Antiferromagneten im äußeren Feld** dar. Die Wechselwirkung zwischen den Spins sei auf nächste Nachbarn mit einem konstanten Wechselwirkungsparameter $J > 0$ beschränkt. Jeder Spin im Untergitter A hat nur Spins aus dem Untergitter B als nächste Nachbarn und umgekehrt. Die Zahl der nächsten Nachbarn sei z.

   (a) Bestimmen Sie in *Molekularfeldnäherung* das thermodynamische Potential $\tilde{G} = -k_{\mathrm{B}} T \ln Z$ als Funktion der Erwartungswerte $m_{\mathrm{A}} = \langle \sigma_i^{(\mathrm{A})} \rangle$ und $m_{\mathrm{B}} = \langle \sigma_i^{(\mathrm{B})} \rangle$.

   (b) Zeigen Sie, dass sich für kleine $\langle \sigma_i^{(\mathrm{A,B})} \rangle$ das thermodynamische Potential pro Teilchen $\tilde{g} = \tilde{G}/N$ als Funktion der beiden Ordnungsparameter $m = (m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})/2$ und $m_{\mathrm{s}} = (m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}})/2$ in der Form

$$\tilde{g} = \tilde{g}_0 + \frac{1}{2} r m_{\mathrm{s}}^2 + u m_{\mathrm{s}}^4 + \frac{1}{2} r_m m^2 - hm + \frac{1}{2} w m_{\mathrm{s}}^2 m^2$$

   schreiben lässt. Der Ordnungsparameter m stellt dabei die mittlere Magnetisierung pro Spin dar, während der Ordnungsparameter m_{s} die sogenannte staggered (oder antiferromagnetische) Magnetisierung bezeichnet. Eingeführt wurden außerdem die Abkürzungen $\tilde{g}_0 \equiv -k_{\mathrm{B}} T \ln 2$, $r \equiv k_{\mathrm{B}} T - Jz$, $r_m \equiv k_{\mathrm{B}} T + Jz$, $u \equiv k_{\mathrm{B}} T/12$ und $w \equiv k_{\mathrm{B}} T$.

   (c) Wie lauten die Bestimmungsgleichungen für m und m_{s}? Setzen Sie die sich daraus ergebenden Lösungen in $\tilde{g}$ ein und diskutieren Sie die möglichen Phasenübergänge.

      i. Was ergibt sich für $h = 0$?

      ii. Betrachten Sie den Fall $h \neq 0$ und bestimmen Sie im Phasendiagramm ($h - T$-Diagramm) die Linien für die Phasenübergänge 1. und 2. Ordnung sowie den trikritischen Punkt.