1. Die Molekularfeldnäherung (Weiß'sche Theorie) liefert für die isotherme Suszeptibilität χ_T von Ising-Ferromagneten die Beziehung

$$\chi_T|_{h=0} \sim \begin{cases} t^{-1} & \text{für } T > T_\mathrm{c} \\ (-t)^{-1} & \text{für } T < T_\mathrm{c} \end{cases}$$

(siehe Vorlesung). Berechnen Sie daraus mit Hilfe des Fluktuation-Dissipation-Theorems das Temperaturverhalten der Korrelationslänge ξ in der Nähe von T_c, d.h., bestimmen Sie die kritischen Exponenten ν und ν'.

2. Bestimmen Sie im Rahmen der Landau-Theorie die kritischen Exponenten ψ und φ eines isotropen Ferromagneten für das Verhalten von Entropie und spezifischer Wärme auf der kritischen Isothermen als Funktion des äußeren Feldes h

$$S - S_\mathrm{c} \sim |h|^{\psi} \ , \ c_h \sim |h|^{\varphi} \ .$$

3. Gegeben sei das Ginzburg-Landau-Funktional in einem d-dimensionalen Raum für einen D-dimensionalen Ordnungsparameter $\mathbf{m} \equiv \sum_{i=1}^{D} m_i \mathbf{e}_i$ in der Form

$$\tilde{G}[\mathbf{m}(\vec{r})] = \int \mathrm{d}^d r \Big\{ \tilde{g}_0(T) + a_0(T - T_\mathrm{c}) \cdot \big(m(\vec{r})\big)^2 + d_0 \big(m(\vec{r})\big)^6 + f_0 \big(\vec{\nabla} \mathbf{m}(\vec{r})\big)^2 - \mathbf{h} \cdot \mathbf{m}(\vec{r}) \Big\} \ ,$$

wobei $\big(m(\vec{r})\big)^2 = \mathbf{m}(\vec{r}) \cdot \mathbf{m}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{D} m_i^2(\vec{r})$. Es soll gelten $a_0 > 0$, $d_0 > 0$ und $f_0 > 0$, sowie $\mathbf{h} = h\mathbf{e}_1$.

   (a) Berechnen Sie am (tri)kritischen Punkt den singulären Anteil der spezifischen Wärme $c_{h=0}$ in der Sattelpunktsnäherung. Bestimmen Sie die entsprechenden kritischen Exponenten α und α'.
   Hinweis:
   $\tilde{G}$ sei minimal für eine homogene Ordnungsparameterkonfiguration $\mathbf{m}(\vec{r}) = \bar{m}\mathbf{e}_1$.

   (b) Setzen Sie

$$\mathbf{m}(\vec{r}) = \big(\bar{m} + \phi_\mathrm{l}(\vec{r})\big)\, \mathbf{e}_1 + \sum_{i=2}^{D} \phi_{\mathrm{t}i}(\vec{r})\, \mathbf{e}_i$$

   und entwickeln Sie für den Fall $\mathbf{h} = 0$ das Funktional $\tilde{G}$ bis zur quadratischen Ordnung in den longitudinalen und transversalen Fluktuationen ϕ_l bzw. ϕ_t.

   (c) Führen Sie die Fouriertranformation für die longitudinalen und transversalen Fluktuationen durch und stellen Sie das Funktional $\tilde{G}$ mit Hilfe der longitudinalen und transversalen Moden $\phi_i(\vec{k})$ dar.

   (d) Berechnen Sie in niedrigster Ordnung die Fluktuationskorrektur zur freien Enthalpie.

   (e) Berechnen Sie in niedrigster Ordnung die Fluktuationskorrektur zur spezifischen Wärme.

   (f) Leiten Sie für $T < T_\mathrm{t}$ durch den Vergleich der Ergebnisse von (a) und (e) das entsprechende Ginzburg Kriterium zur Gültigkeit der Molekularfeldnäherung ab und bestimmen Sie die obere kritische Dimension für das gegebene Modell.