## Anwendung der RG-Technik im Ortsraum auf ein 1-dimensionales Ising-Modell

Betrachten Sie das dazu das 1-dimensionale Ising-Modell im äußeren Feld $h$ (Gitterkonstante $a$, nur Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn, $J > 0$, periodische Randbedingungen)

$$\mathcal{H} = -J \sum_{<i,j>} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i = -k_\mathrm{B} T \sum_{i=1}^{N} \left\{ \tilde{J} \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{1}{2} \tilde{h} (\sigma_i + \sigma_{i+1}) \right\} \equiv -k_\mathrm{B} T \, \tilde{\mathcal{H}} \, ,$$

wobei $\tilde{J} \equiv J/k_\mathrm{B}T$und $\tilde{h} \equiv h/k_\mathrm{B}T$. Die Zahl der Spins $N$ sei o.B. d.A. gerade.

1. (a) Dezimieren Sie die Zahl der Freiheitsgrade durch Absummation in der Zustandssumme $Z_N(\tilde{J}, \tilde{h}) \equiv Z_N[\tilde{\mathcal{H}}]$ über alle Spins mit "$i =$ gerade".
   Zeigen Sie, dass Sie die Zustandssumme mit Hilfe eines neuen, renormierten, Hamiltonians $\tilde{\mathcal{H}}'$ ausdrücken können, der nur noch die Spins an den ungeraden Orten $i = 1, 3, 5, ...$ enthält. Dabei hat $\tilde{\mathcal{H}}'$ eine ähnliche Struktur wie der ursprüngliche Hamiltonian $\tilde{\mathcal{H}}$, allerdings mit neuen (renormierten) Kopplungskonstanten $\tilde{J}'$ und $\tilde{h}'$, die durch die Beziehung

   $$\left( e^{\tilde{J}(\sigma_1+\sigma_3)+\tilde{h}} + e^{-\tilde{J}(\sigma_1+\sigma_3)-\tilde{h}} \right) e^{\frac{1}{2}\tilde{h}(\sigma_1+\sigma_3)} = \Phi(\tilde{J}, \tilde{h}) \, e^{\tilde{J}'\sigma_1\sigma_3 + \frac{1}{2}\tilde{h}'(\sigma_1+\sigma_3)} \qquad (*)$$

   bestimmt sind.

   (b) Zeigen Sie (durch Einsetzen), dass die Beziehung (*) für beliebige Werte von $\sigma_1$ und $\sigma_3$ erfüllt ist und finden Sie den Zusammenhang zwischen den renormierten Parametern $\tilde{J}', \tilde{h}'$ und den Ausgangsparametern $\tilde{J}, \tilde{h}$.

2. Betrachten Sie zunächst den Fall **ohne äußeres Feld** ($\tilde{h} = 0$).

   (a) Zeigen Sie, dass gilt

   $$\tilde{J}' = \frac{1}{2} \ln(\cosh(2\tilde{J}))$$

   und finden Sie die Fixpunkte der Renormierungsgruppentransformation.

   (b) Berechnen Sie durch Absummation von Spins im Sinne der RG-Transformation die Korrelationsfunktion $\langle \sigma_i \sigma_{i+\Lambda} \rangle$ mit $\Lambda \gg 1$.
   Nutzen Sie dabei aus, dass sich die Beziehung zwischen $\tilde{J}'$ und $\tilde{J}$ auch in der Form

   $$\tanh(\tilde{J}') = \tanh^2(\tilde{J})$$

   schreiben lässt.

   (c) Finden sie mit Hilfe des Ergebnisses von (b) und der Tatsache, dass sich die Korrelationsfunktion $g_2(r)$ für $r \gg \xi$ proportional zu $e^{-r/\xi}$ verhält, die Rekursionsvorschrift für die (dimensionslose) Korrelationslänge $\xi$ (gemessen in Einheiten der Gitterkonstante des jeweiligen Gitters).

   (d) Was folgt aus der fortlaufenden Iteration für die (dimensionslose) freie Enthalpie pro Spin $\tilde{g} = -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln Z_N(\tilde{J})$?

**Rückseite beachten!**

3. Betrachten Sie nun den Fall **mit äußerem Feld** $h \neq 0$.

   (a) Beweisen Sie (ausgehend von den in Aufgabe 1(b) erhaltenen Transformationsbeziehungen), dass für alle endlichen $\tilde{J}$ gilt

   $$\frac{\partial \tilde{h}'}{\partial \tilde{h}} > 0 \; .$$

   Was folgt daraus für die Fixpunkte der RG-Transformation?

   (b) Linearisieren Sie die Flussgleichungen für $\tilde{J}$ und $\tilde{h}$ (siehe 1(b)) in der Umgebung des kritischen Punktes. Zeigen Sie, dass in der Nähe dieses Fixpunktes (mit $\tilde{J} = \infty$ und $\tilde{h} = 0$) gilt:

   $$e^{-\tilde{J}'} = \sqrt{2} e^{-\tilde{J}} \quad , \quad \tilde{h}' = 2\tilde{h} \; .$$

   (c) Fassen Sie nun $e^{-\tilde{J}}$ und $\tilde{h}$ als Skalenfelder auf.
   Zeigen Sie, dass dann für den singulären Anteil $\tilde{g}_{\text{sing}}$ der freien Enthalpie pro Spin

   $$\tilde{g}_{\text{sing}}(e^{-\tilde{J}}, \tilde{h}) = \lambda^{-1} \tilde{g}_{\text{sing}}(\lambda^{1/2} e^{-\tilde{J}}, \lambda \tilde{h})$$

   mit dem Skalierungsfaktor $\lambda = 2$ gilt.
   Beweisen Sie, dass daraus das folgende Skalengesetz für die freie Enthalpie pro Spin folgt

   $$\tilde{g}_{\text{sing}}(e^{-\tilde{J}}, \tilde{h}) = e^{-2\tilde{J}} \tilde{g}_{\text{sing}}(\tilde{h} e^{2\tilde{J}}) \; . \qquad (**)$$

   (d) Zeigen Sie, dass als Konsequenz des obigen Skalengesetzes die Beziehung

   $$\frac{\gamma}{\nu} = \frac{2-\alpha}{\nu} = 1$$

   für die kritischen Exponenten $\gamma, \nu, \alpha$ gilt.
   (Hinweis: Ersetzen Sie zunächst in Gleichung (**) $\tilde{J}$ durch die Korrelationslänge $\xi$.)