1. Betrachten Sie das Ising-Modell für ein hyperkubisches Gitter mit beliebiger Dimension $d > 1$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Migdal-Kadanoff Bond-Moving-Technik (siehe Vorlesung) für diesen Fall verallgemeinert werden kann und finden Sie die Transformationsbeziehung für die Kopplungskonstante $\tilde{J}$.

   (b) Fassen Sie d als kontinuierliche Variable auf und finden Sie die Fixpunkte der Renormierungsgruppentransformation für den Fall $d = 1 + \epsilon$ mit $\epsilon \ll 1$. Zeigen Sie, dass $d = 1$ die untere kritische Dimension für das Ising-Modell darstellt.

2. Der Mittelwert $\langle A \rangle_0$ sei definiert durch $\langle A \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\Psi_{\vec{k}}\, A\, e^{\tilde{\mathcal{H}}_0}$ mit $Z_0 = \int \mathcal{D}\Psi_{\vec{k}}\, e^{\tilde{\mathcal{H}}_0}$ und $\tilde{\mathcal{H}}_0 = -\int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} (\tilde{a} + \tilde{f} k^2) \Psi_{\vec{k}} \Psi_{-\vec{k}}$.

   (a) Beweisen Sie die Gültigkeit der beiden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\langle \Psi_{\vec{k}} \Psi_{\vec{k}'} \rangle_0 &= (2\pi)^d\, \delta(\vec{k} + \vec{k}')\, \frac{1}{2(\tilde{a} + \tilde{f} k^2)}\,, \\
\langle \Psi_{\vec{k}_1} \Psi_{\vec{k}_2} \Psi_{\vec{k}_3} \Psi_{\vec{k}_4} \rangle_0 &= (2\pi)^d\, \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)\, \frac{1}{2(\tilde{a} + \tilde{f} k_1^2)}\, (2\pi)^d\, \delta(\vec{k}_3 + \vec{k}_4)\, \frac{1}{2(\tilde{a} + \tilde{f} k_3^2)} \\
&\quad + (2\pi)^d\, \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_3)\, \frac{1}{2(\tilde{a} + \tilde{f} k_1^2)}\, (2\pi)^d\, \delta(\vec{k}_2 + \vec{k}_4)\, \frac{1}{2(\tilde{a} + \tilde{f} k_2^2)} \\
&\quad + (2\pi)^d\, \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_4)\, \frac{1}{2(\tilde{a} + \tilde{f} k_1^2)}\, (2\pi)^d\, \delta(\vec{k}_2 + \vec{k}_3)\, \frac{1}{2(\tilde{a} + \tilde{f} k_2^2)}\,.
\end{aligned}
$$

   Hinweis:
   Stellen Sie zunächst die Korrelationsfunktionen $\langle \Psi_{\vec{k}_1} \ldots \Psi_{\vec{k}_n} \rangle_0$ mit Hilfe des erzeugenden Funktionals

$$
Z(h) = \int \mathcal{D}\Psi_{\vec{k}}\, e^{\tilde{\mathcal{H}}_0 + \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\, \tilde{h}_{\vec{k}} \Psi_{-\vec{k}}}
$$

   dar und berechnen Sie $Z(h)$.

   (b) Was folgt allgemein für $\left\langle \prod_{i=1}^{l} \Psi_{\vec{k}_i} \right\rangle_0 = \ldots$? (Wick-Theorem)