Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
Probeklausur im Wintersemester 2019/20

Wintersemester 2019/20

Name:

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Bearbeitungszeit: 150 Minuten ($2\frac{1}{2}$ Stunden).
- Hilfsmittel: keine.
- Schreiben Sie jede Aufgabe auf ein gesondertes Blatt!
- Jedes Blatt mit Namen (Druckschrift!), Matrikelnummer und Aufgabennummer versehen!
- Schreiben Sie nur auf der Vorderseite der Blätter!
- Bitte nur in schwarz oder blau schreiben, auf keinen Fall mit Bleistift!
- Bleistiftgeschriebenes und Unleserliches wird nicht gewertet.
- Bei Korrekturen Falsches klar durchstreichen:
  falsch und richtig nebeneinander wird als falsch gewertet.

Maximal erreichbare Punkte:
44 Punkte in Klausur + eventuell 4 Bonus-Punkte aus Übung = 48 Punkte.

Zum Bestehen werden 20 Punkte benötigt.

1	2	3	4	5	Σ

Viel Glück!

1. Anwendungen einiger wichtiger Definitionen **5 Punkte**

Geben Sie jeweils eine kurze Antwort (Formel) auf folgende Fragen.

a) **0.5 Punkte**

Was ist die Determinante der (3×3)-Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$?

b) **0.5 Punkte**

Was ist das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

c) **0.5 Punkte**

Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$x^3 = 1$$

an.

d) **0.5 Punkte**

Was ist die Ordnung der folgenden Differentialgleichung? Ist sie homogen? Ist sie linear?

$$\frac{d^{15}}{dx^{15}} f(x) = \cos(x)$$

e) **0.5 Punkte**

Was ist die totale Differential der Funktion $f(x, y, t)$?

f) **0.5 Punkte**

Wie lauten die ersten fünf Glieder der Taylorreihe für $f(x) = x$ für die Entwicklung um $x = 1$?

g) **0.5 Punkte**

Bestimmen Sie die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 15\,x^2 \\ 2\,\cos(y) + z^{17} \\ H_3(x) \end{pmatrix},$$

wobei $H_3(x)$ das sogenannte Hermitesche Polynom vom Grad 3 ist (es gilt: $H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2}\, \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2}$).

h) **0.5 Punkte**

Geben Sie die Zylinderkoordinaten des Punktes an, der im kartesischen System den Ortsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}$ hat.

i) **0.5 Punkte**

Was ist (unter Nutzung der Einsteinschen Summenkonvention) der Wert von $\delta_{1j}\,\epsilon_{2j3}$?

j) **0.5 Punkte**

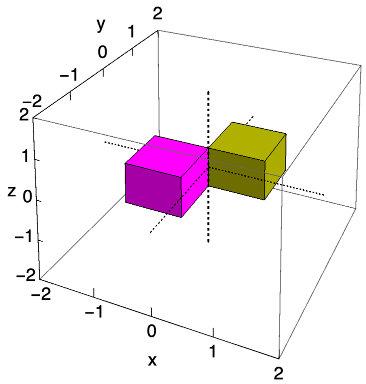
Was besagt der Satz von Schwarz für die zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion $f(x, y)$?

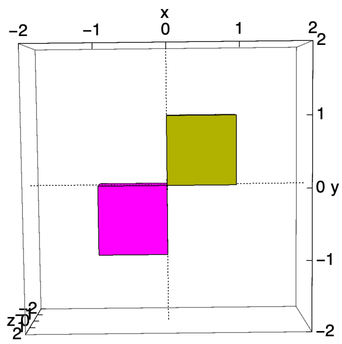
2. Trägheitstensor zweier Würfel **8 Punkte**

Der Trägeheitstensor Θ mit Einträgen Θ_{ij} beschreibt die Trägheit eines Objekts gegenüber Änderungen seines Drehimpulses. Analog zur Masse m im Zusammenhang $\vec{p} = m\,\vec{v}$ zwischen Impuls $\vec{p}$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$ gilt für den Drehimpuls $\vec{L}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, dass $\vec{L} = \Theta\,\vec{\omega}$. Der Trägheitstensor ist definiert als

$$\Theta = \int_V dV\,\rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -x\,y & -x\,z \\ -x\,y & x^2+z^2 & -y\,z \\ -x\,z & -y\,z & x^2+y^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Betrachten Sie nun ein System aus zwei massiven Würfeln der Kantenlänge 1, die entlang der z-Achse "zusammengeklebt" sind (im Folgenden "Doppelwürfel" genannt). Einer der beiden Würfel (in der Zeichnung pink) hat dabei seine untere linke Ecke am Punkt $(x, y, z) = (-1, -1, -1/2)$ und seine obere rechte Ecke am Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 1/2)$. Der andere Würfel (in der Zeichnung gelb) hat seine untere linke Ecke am Punkt $(x, y, z) = (0, 0, -1/2)$ und seine obere rechte Ecke am Punkt $(x, y, z) = (1, 1, 1/2)$:





Innerhalb beider Würfel sei die Massendichte konstant und gegeben durch $\rho(\vec{r}) = \rho_0$, außerhalb der Würfel gelte $\rho(\vec{r}) = 0$.

a) **3 Punkte**

Symmetrien sind in der Physik extrem wichtig. Ein Grund hierfür ist, dass Symmetrien die Beschreibung eines Systems vereinfachen. Wir wollen dies nun nutzen, um den Trägheitstensor auf eine einfachere Form zu bringen. Unter anderem gilt, dass das physikalische System der beiden Würfel symmetrisch unter einer Spiegelung an der x-Achse gefolgt von einer Spiegelung an der y-Achse ist. Mathematisch entspricht dies einem Koordinatenwechsel $x = -x'$ und $y = -y'$. Um den Trägheitstensor zu vereinfachen können Sie diese Eigenschaft wie folgt nutzen:

- Teilen Sie das Gesamtintegral in den Anteil des pinken Würfels und den Anteil des gelben Würfels.
- Nutzen Sie nun die oben diskutierte Spiegeltransformation im Integral über einen der beiden Würfel, um zu zeigen, das der Trägheitstensor gegeben ist durch

$$\Theta = \int_{-1/2}^{1/2} dz \int_0^1 dy \int_0^1 dx\,\rho_0 \begin{pmatrix} 2\,(y^2+z^2) & -2\,x\,y & 0 \\ -2\,x\,y & 2\,(x^2+z^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2\,(x^2+y^2) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Es ist dabei hilfreich sich zu erinnern, dass Sie integrationsvariablen beliebig umbenennen dürfen.

b) **5 Punkte**

Berechnen Sie die explizite Form des Trägheitstensors. Tipp: Es ist am einfachsten, die Integrale der Form $\int dV\,x^2$, $\int dV\,y^2$, $\int dV\,z^2$ und $\int dV\,x\,y$ mit den Grenzen von Gleichung (2) auszuführen und Θ dann daraus zusammenzusetzen.

3. Gekoppelte Differentialgleichungen **12 Punkte**

a) **5 Punkte**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

$$\frac{df(x)}{dx} = -5\,f(x) + 3\,g(x) \quad \text{und} \quad \frac{dg(x)}{dx} = -5\,g(x) + 3\,f(x). \tag{3}$$

mit Hilfe des Vektors $\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$ und einer Matrix-Darstellung der gekoppelten Differentialgleichungen über die Eigenwerte und -vektoren dieser Matrix.

b) **5 Punkte**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der in Gleichung (3) gegebenen gekoppelten Differentialgleichungen nun auf einem alternativen Rechenweg dadurch, dass Sie aus Gleichung (3) neue Differentialgleichungen für $h_+(x) = f(x) + g(x)$ und für $h_-(x) = f(x) - g(x)$ ableiten, und dann die allgemeine Lösung für $h_+(x)$ und $h_-(x)$ bestimmen. Zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis konsistent mit dem von Aufgabenteil a) ist.

c) **2 Punkte**

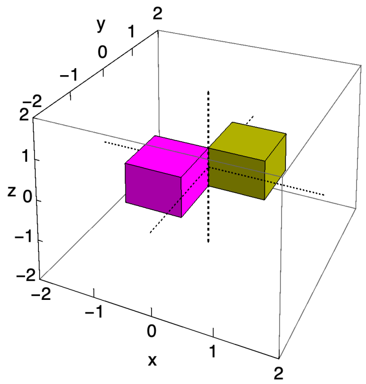
Bestimmen Sie nun die spezielle Lösung, die die Randbedingungen

$$f(0) = 4 \quad \text{und} \quad \frac{df(0)}{dx} = 2$$

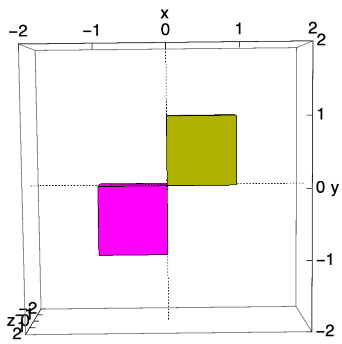
erfüllt.

4. Massendichte zweier Würfel **7 Punkte**

Betrachten Sie nun wieder einen "Doppelwürfel" der wie in Aufgabe 2 geformt ist: ein System aus zwei massiven Würfeln der Kantenlänge 1, die entlang der z-Achse "zusammengeklebt" sind. Einer der beiden Würfel (in der Zeichnung pink) hat dabei seine untere linke Ecke am Punkt $(x, y, z) = (-1, -1, -1/2)$ und seine obere rechte Ecke am Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 1/2)$. Der andere Würfel (in der Zeichnung gelb) hat seine untere linke Ecke am Punkt $(x, y, z) = (0, 0, -1/2)$ und seine obere rechte Ecke am Punkt $(x, y, z) = (1, 1, 1/2)$:



schräge Ansicht



Ansicht von oben

Im Unterschied zu Aufgabe zwei sei nun aber die Massendichte nicht konstant, sondern gegeben durch

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \, \vec{r} \cdot \vec{r}, \tag{4}$$

wobei $\rho_0 \in \mathbb{R}$ konstant ist.

a) **5 Punkte**

Berechnen Sie die Gesamtmasse

$$M = \int_{\text{Doppelwürfel}} dV \rho(\vec{r}). \tag{5}$$

der Doppelwürfels durch explizites Ausführen dieses Integrals.

b) **2 Punkte**

Berechnen Sie den Massenschwerpunkt

$$\vec{R} = \frac{\int_{\text{Doppelwürfel}} dV \, \rho(\vec{r}) \, \vec{r}}{\int_{\text{Doppelwürfel}} dV \, \rho(\vec{r})}. \tag{6}$$

des Doppelwürfels durch explizites Ausführen dieses Integrals.

5. Arbeit als Linienintegral **8 Punkte**

Betrachten Sie das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 2\,x \\ a\,y\,z^2 \\ b\,y^2 z/2. \end{pmatrix}, \tag{7}$$

wobei a und b reelle Konstanten sind.

a) **6 Punkte**

Berechnen Sie die geleistete Arbeit

$$W_i = -\int_{\mathcal{C}_i} d\vec{l} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \tag{8}$$

entlang folgender Wege:

(i) Entlang des Wegs $\mathcal{C}_1$, der in einer geraden Linie von $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ nach $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ führt.

(ii) Entlang des Wegs $\mathcal{C}_2$, der in einer geraden Linie von $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ nach $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ führt.

(iii) Entlang des Wegs $\mathcal{C}_3$, der in einer geraden Linie von $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ nach $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ führt.

b) **2 Punkte**

Eine Kraft heißt "konservativ", wenn die mit ihr assoziierte Arbeit entlang jedes geschlossenen Weges verschwindet. Ein konservatives Kraftfeld lässt sich auch als Gradient eines zum Kraftfeld assoziierten Potentials $\Phi(\vec{r})$ schreiben, $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r})$. Wann ist die in Gleichung (7) gegebene Kraft konservativ? Bestimmen Sie für diesen Fall ein zum Kraftfeld assoziiertes Potential $\Phi(\vec{r})$. Tipp: Wenn Sie ein zum Kraftfeld assoziiertes Potential gefunden haben, ist auomatisch die Arbeit entlang jedes geschlossenenen Wegs Null. Sie können das Potential zum Beispiel dadurch bestimmen, dass Sie eine unbestimmte Integration der Komponenten des Kraftfeldes, also zum Beispiel von $F_x(\vec{r})$, nach den jeweiligen Ableitungen durchführen und die verschiedenen Ergebnisse der Integrationen vergleichen. Beachten Sie, dass z. B. eine "Integrationskonstante" für ein Integral bezüglich x noch von y und z abhängen kann.