Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
10. Übungsblatt

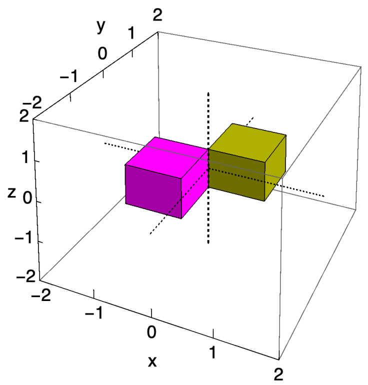
Wintersemester 2019/20

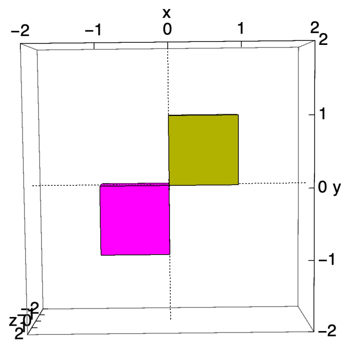
1. Trägheitstensor zweier Würfel **8 Punkte**

Der Trägeheitstensor Θ mit Einträgen Θ_{ij} beschreibt die Trägheit eines Objekts gegenüber Änderungen seines Drehimpulses. Analog zur Masse m im Zusammenhang $\vec{p} = m\,\vec{v}$ zwischen Impuls $\vec{p}$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$ gilt für den Drehimpuls $\vec{L}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, dass $\vec{L} = \Theta\,\vec{\omega}$. Der Trägheitstensor ist definiert als

$$\Theta = \int_V dV\,\rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -x\,y & -x\,z \\ -x\,y & x^2+z^2 & -y\,z \\ -x\,z & -y\,z & x^2+y^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Betrachten Sie nun ein System aus zwei massiven Würfeln der Kantenlänge 1, die entlang der z-Achse "zusammengeklebt" sind (im Folgenden "Doppelwürfel" genannt). Einer der beiden Würfel (in der Zeichnung pink) hat dabei seine untere linke Ecke am Punkt $(x, y, z) = (-1, -1, -1/2)$ und seine obere rechte Ecke am Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 1/2)$. Der andere Würfel (in der Zeichnung gelb) hat seine untere linke Ecke am Punkt $(x, y, z) = (0, 0, -1/2)$ und seine obere rechte Ecke am Punkt $(x, y, z) = (1, 1, 1/2)$:





Innerhalb beider Würfel sei die Massendichte konstant und gegeben durch $\rho(\vec{r}) = \rho_0$, außerhalb der Würfel gelte $\rho(\vec{r}) = 0$.

a) **3 Punkte**

Symmetrien sind in der Physik extrem wichtig. Ein Grund hierfür ist, dass Symmetrien die Beschreibung eines Systems vereinfachen. Wir wollen dies nun nutzen, um den Trägheitstensor auf eine einfachere Form zu bringen. Unter anderem gilt, dass das physikalische System der beiden Würfel symmetrisch unter einer Spiegelung an der x-Achse gefolgt von einer Spiegelung an der y-Achse ist. Mathematisch entspricht dies einem Koordinatenwechsel $x = -x'$ und $y = -y'$. Um den Trägheitstensor zu vereinfachen können Sie diese Eigenschaft wie folgt nutzen:

- Teilen Sie das Gesamtintegral in den Anteil des pinken Würfels und den Anteil des gelben Würfels.
- Nutzen Sie nun die oben diskutierte Spiegeltransformation im Integral über einen der beiden Würfel,

um zu zeigen, das der Trägheitstensor gegeben ist durch

$$\Theta = \int_{-1/2}^{1/2} dz \int_0^1 dy \int_0^1 dx\, \rho_0 \begin{pmatrix} 2\,(y^2+z^2) & -2\,x\,y & 0 \\ -2\,x\,y & 2\,(x^2+z^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2\,(x^2+y^2) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Es ist dabei hilfreich sich zu erinnern, dass Sie Integrationsvariablen beliebig umbenennen dürfen.

b) **5 Punkte**

Berechnen Sie die explizite Form des Trägheitstensors. Tipp: Wie bei Integralen von Vektoren führt man auch Integrale von Matrizen komponentenweise aus. Es ist weiterhin bei der konkreten Rechnung vielleicht für Sie einfacher, die Integrale der Form $\int dV\, x^2$, $\int dV\, y^2$, $\int dV\, z^2$ und $\int dV\, x\,y$ mit den Grenzen von Gleichung (2) auszuführen und Θ dann daraus zusammenzusetzen.

2. Grundlegende Eigenschaften der Deltafunktion — 6 Punkte

In der Physik ist es oft hilfreich, eine Aussage vom Typ "genau dann, wenn ..." zu machen (und also auch in eine Formel zu packen). Bei Summen haben wir dazu das Kronecker-Delta δ_{ij} eingeführt, das als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

definiert ist. Es gilt somit, dass

$$\sum_j \delta_{ij}\, a_j = a_i \quad \text{und} \quad \sum_j \delta_{ij} \; = 1, \tag{4}$$

wobei a_i zum Beispiel die Glieder einer Folge oder Reihe sind. Weiterhin haben wir gelernt, dass Integrale als Grenzwerte von Summen zu verstehen sind, in denen die Summanden immer kleiner werden. In der Folge wollen wir nun das Konzept der "Diracschen Delta-Funktion" $\delta(x-x_0)$ kennenlernen. Diese soll das Kronecker-Delta von Folgen/Reihen und Summen zu Funktionen und Integralen wie folgt verallgemeinern:

$$\sum_j \delta_{ij}\, a_j = a_i \;\; \rightarrow \;\; \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-x_0)\, f(x) = f(x_0) \quad \forall\, x_0 \tag{5}$$

und

$$\sum_j \delta_{ij} \; = 1 \;\; \rightarrow \;\; \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-x_0) = 1 \quad \forall\, x_0. \tag{6}$$

Die "Diracsche Delta-Funktion" $\delta(x)$ ist trotz dieses oft genutzten Namens nicht wirklich eine Funktion, sondern eine "Distribution" (eine verallgemeinerte Funktion). Wir können Sie aber durch normale Funktionen $\delta_\epsilon(x)$ so annähern, dass wir $\delta(x)$ als Grenzwert dieser normalen Funktionen erhalten:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \delta_\epsilon(x). \tag{7}$$

Es gibt mehrere mögliche Wahlmöglichkeiten für die Funktion $\delta_\epsilon(x)$, wir nutzen hier

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}}\, e^{-x^2/\epsilon}. \tag{8}$$

a) **1 Punkt**

Zeichnen Sie $\delta_\epsilon(x-x_0)$ und diskutieren Sie das Verhalten dieser Funktion für immer kleiner werdende ϵ. Was ergibt sich im Grenzfall $\epsilon \to 0^+$?

b) **2 Punkte**

Zunächst überprüfen wir die "Normierung" $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-x_0) = 1\; \forall x_0$. Zeigen Sie im ersten Schritt, dass

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

Berechnen Sie hierzu zuerst I^2. Schließen Sie dann auf den Wert von I. Tipp: Achten Sie auf die Benennung der Integrationsvariablen in I^2 und transformieren Sie das zweidimensionale Integral zu Polarkoordinaten. Falls wir das noch nicht in der Vorlesung hatten: bei zweidimensionalen Integralen über die (x, y)-Ebene geht das dadurch, dass Sie $x^2 + y^2 \to r^2$ ersetzen, und die Integrale durch $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(x^2 + y^2) \to \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dr\, r\, f(r^2)$ ersetzen, wobei f eine Funktion ist. Danach ist es vielleicht hilfreich, noch eine geschickte Variablensubstitution zu machen.

c) **1 Punkt**

Berechnen Sie nun

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_\epsilon(x - x_0). \tag{9}$$

d) **2 Punkte**

Zeigen Sie nun, dass

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\, \delta_\epsilon(x - x_0) = f(x_0), \tag{10}$$

wobei $f(x)$ der Einfachheit halber bei $x = x_0$ unendlich oft stetig differenzierbar sei (also “nett”). Warum können Sie in Anbetracht des Ergebnisses von Aufgabe 1a im Grenzwert kleiner $\epsilon \to 0^+$ die Funktion $f(x)$ durch ihre Taylorreihe bis zur ersten Ordnung um $x = x_0$ ersetzen? Nutzen Sie dies, um das Integral für festes und kleines ϵ zu berechnen und nehmen Sie dann den Grenzwert $\epsilon \to 0$. Beachten Sie hierbei auch die Definition von uneigentlichen Integralen und nutzen Sie – wann immer es hilfreich ist – Variablensubstitutionen.

3. Zusatzaufgabe: mehr zur Deltafunktion **6 Punkte**

Nachdem wir uns ein grundsätzliches Bild der Diracschen Deltafunktion als Grenzwert gemacht haben, zeigen wir nun einige weitere Eigenschaften der Delta-Funktion.

a) **1 Punkt**

Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \frac{d\delta(x - x_0)}{dx} = -\frac{df(x_0)}{dx} \tag{11}$$

ist. Hierbei können Sie annehmen, dass $f(x)$ unendlich oft differenzierbar und beschränkt ist, also “richtig nett”. Tipp: nutzen Sie partielle Integration.

b) **2 Punkte**

Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \delta(a\,(x - x_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \frac{1}{|a|}\, \delta(x - x_0) \quad \text{für} \quad a \neq 0. \tag{12}$$

Tipp: nutzen Sie Variablensubstitution und unterscheiden Sie $a > 0$ und $a < 0$.

c) **3 Punkte**

Zeigen Sie, dass für eine Funktion $g(x)$ mit N Nullstellen $\tilde{x}_i$, also $g(\tilde{x}_i) = 0\ \forall i$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \delta(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{|g'(\tilde{x}_i)|} \delta(x - \tilde{x}_i) \right). \tag{13}$$

gilt. Hierbei läuft der Index i über alle Nullstellen von $g(x)$, und sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ seien der Einfachheit halber unendlich oft stetig differenzierbar und beschränkt. Tipp: unterteilen Sie das

Integral in Teilstücke nah an den Nullstellen, Teilstücke dazwischen und die beiden Teilstücken an den "äußeren Enden" des Integrationsbereichs. Was ist jeweils der Wert des Integranden in den Teilstücken ohne Nullstelle? Führen Sie dann nahe der Nullstellen eine Taylor-Entwicklung von $g(x)$ bis zur ersten nicht-verschwindenden Ordnung durch. Nutzen Sie dann Gleichung (5) und das Ergebnis von Aufgabe 2b.