Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
3. Übungsblatt

Wintersemester 2019/20

1. Elektromagnetische Felder **4 Punkte**

In der Physik bezeichnet man mit dem Wort "Feld" eine Funktion, die jedem Punkt $\vec{r}$ im Raum und jedem Zeitpunkt t einen Wert zuordnet. Ein Vektorfeld ordnet jedem Punkt $\vec{r}$ im Raum und jedem Zeitpunkt t einen Vektor mit bestimmtem Wert zu. Hängt das Feld nicht von der Zeit hab (ist es also zeitlich konstant), so nennt man es "statisch". Beispiele für wichtige Vektorfelder in der Physik, die auch statisch sein können, sind das elektrische Feld $\vec{E}$ und magnetische Feld $\vec{B}$. Skizzieren und beschreiben Sie die folgenden (statischen) elektrischen und magnetischen Felder, indem Sie das Feld für eine angemessene Anzahl von Punkten auswerten (also so viele Punkte, dass man auch etwas erkennen kann):

a) **1 Punkt**

Das elektrische Feld eines Plattenkondensators mit Platten senkrecht zur x-Achse bei $x = 0$ und $x = L$ mit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}\,\vec{e}_x \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathcal{E} > 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L, \\ \mathcal{E} = 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

b) **1 Punkt**

Das elektrische Feld einer Punktladung mit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad \text{(setzen Sie der Einfachheit } \mathcal{E} \to 1\text{).} \tag{2}$$

c) **1 Punkt**

Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahts, der entlang der z-Achse gespannt ist (dieser ist der Einfachheit halber als unendlich lang angenommen):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mathcal{B}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{x^2+y^2} \quad \text{(setzen Sie der Einfachheit } \mathcal{B} \to 1\text{).} \tag{3}$$

d) **1 Punkt**

Das elektrische Feld eines elektrischen Dipols:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} - \frac{\vec{r}+\vec{r}_0}{|\vec{r}+\vec{r}_0|^3}\right) \quad \text{mit} \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(setzen Sie der Einfachheit } \mathcal{E} \to 1\text{).} \tag{4}$$

Tipp: machen Sie sich klar, dass das Feld in der Nähe von $\vec{r} = \pm\vec{r}_0$ in guter Näherung dem Feld eines Monopols mit positiver bzw. negativer Ladung entspricht – warum ist das so? Was ist der Wert des Feldes weit entfernt von den beiden Monopolen? Wohin zeigt das Feld in der (y, z)-Ebene?

2. Zerlegung von Vektoren in Komponenten **6 Punkte**

Im dreidimensionalen Raum gilt für einen allgemeinen Vektor $\vec{a}$ und jeden beliebigen Einheitsvektor $\vec{n}$, dass

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} \quad \text{mit} \quad \vec{a}_{\parallel} = \vec{n}\,(\vec{n} \cdot \vec{a}) \quad \text{und} \quad \vec{a}_{\perp} = (\vec{n} \times \vec{a}) \times \vec{n}. \tag{5}$$

a) **2 Punkte**

Überprüfen Sie, dass Gleichung (5) allgemein gilt. Tipp: wählen Sie das Koordinatensystem geschickt.

b) **1 Punkt**

Interpretieren Sie ihr Ergebnis im Sinne einer Zerlegung des Vektors $\vec{a}$ in Komponenten (welche Komponenten sind das)? Hierbei sind die geometrischen Interpretation von Skalarprodukt und Kreuzproduktes ("rechte Hand Regel") hilfreich.

c) **3 Punkte**

Zerlegen Sie den Vektor $\vec{a} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$ explizit im normalen kartesischen Koordinatensystem mittels Gleichung (5) für

- $\vec{n}_1 = \vec{e}_x$,
- $\vec{n}_2 = (\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2}$,
- $\vec{n}_3 = (\vec{e}_x - \vec{e}_y)/\sqrt{2}$

und überzeugen Sie sich so explizit, dass die Formel gilt.

3. Zusatzaufgabe: Cauchy-Kriterium (wieder eher echte Mathematik als Rechnen) **7 Punkte**

In der Vorlesung haben Sie/werden Sie das formale Kriterium für die Konvergenz einer Reihe s, die wir aus einer Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{X}, \quad i \mapsto a_i$ durch Summation der Folgenglieder erhalten, $s_j = \sum_{n=0}^{j} a_j$, wie folgt kennengelernt/ kennen lernen

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n : |s_i - s_n| < \epsilon \quad \forall i > n \tag{6}$$

("für alle Zahlen $\epsilon > 0$ existiert ein Index n so, dass alle Partialsummen s_i mit $i > n$ sich vom sogenannten Grenzwert s_∞ um weniger als ϵ unterscheiden"). Um dies in der Praxis für eine gegebene Reihe zu überprüfen nutzt man Konvergenzkriterien. Eines davon ist das "Cauchy-Kriterium". Dieses besagt grob, dass eine Reihe dann konvergiert, wenn man die Folgenglieder a_n bis a_m aufsummieren kann (wobei natürlich $m > n$ sein muss), und diese Summe für ausreichend große n beliebig klein wird – egal welches $m > n$ man wählt. Ganz genau ist das Kriterium:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, m \geq n > N : |a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| < \epsilon. \tag{7}$$

In Worten: "für alle $\epsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl N so, dass für alle $m > n > N$ die Summe $|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m|$ kleiner ϵ ist". Also: für alle Zahlen $\epsilon > 0$ gibt es einen Index N so, dass die Summe der Folgenglieder a_n bis a_m für alle möglichen Kombinationen von Indizes n und m (mit $m > n$ und $n > N$) im Betrag kleiner als ϵ ist. Den Index N können wir dabei passend wählen. Andernfalls divergiert die Reihe.

Überprüfen Sie, ob die Reihe s_a, die mittels der Folge

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{X}, \quad i \mapsto \frac{1}{i^2} \tag{8}$$

definiert ist, konvergiert oder divergiert. Hierzu können Sie wie folgt vorgehen:

- Betrachten Sie zunächst die Reihe s_b, mittels der Folge $b : \mathbb{N} \to \mathbb{X}, \quad i \mapsto \frac{1}{i(i-1)}$ definiert ist. Wählen Sie $N > 1/\epsilon$ und überprüfen Sie die Konvergenz dieser Reihe mit dem Cauchy-Kriterium.

  Tip: Vergleichen Sie die Glieder der Folge b mit $\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}$. Nutzen Sie das Ergebnis dieses Vergleichs, um das Cauchy-Kriterium für die Reihe s_b zu vereinfachen. Es ist dann hilfreich, die Größe von $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{m}$ mit der von $\frac{1}{n-1}$ zu vergleichen. Danach ist es hilfreich, die Größe von $\frac{1}{n-1}$ mit ϵ zu vergleichen. Erinnern Sie sich dabei daran, was Sie über n und N sagen können, und was das für den Vergleich von $\frac{1}{n-1}$ und $\frac{1}{N}$ bedeutet.

- Vergleichen Sie das Cauchy-Kriterium der Reihe s_a mit dem der Reihe s_b. Was folgt aus der Konvergenz oder Divergenz der Reihe s_b für die Konvergenz oder Divergenz der Reihe s_a?