Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Dr. T. Meng
www.quantum-design.org/teaching

Rechenmethoden für Lehramt Physik
8. Übungsblatt

Wintersemester 2018/19

1. Definition der Ableitung als Grenzwert **2 Punkte**

Beweisen Sie ausgehend von der Definition der Ableitung als

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

folgende Gleichungen durch das explizite Bilden des Grenzwerts $\Delta x \to 0$.

a) **1 Punkt**

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\, g(x)\right) = \frac{df(x)}{dx}\, g(x) + f(x)\, \frac{dg(x)}{dx}.$$

b) **1 Punkt**

$$\frac{d}{dx}\, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{df(x)}{dx}\, g(x) - f(x)\, \frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2}.$$

2. Taylorreihen **8 Punkte**

Bestimmen Sie folgende Taylorreihen.

a) **2 Punkte**

Die Taylorreihe von

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + x_0}} \tag{2}$$

um $x = -2$ bis zur vierten Ordnung in $x + 2$ (hierbei können Sie $x_0 > -2$ annehmen).

b) **2 Punkte**

Die Taylorreihe von

$$g(x) = \ln\left(\cosh(x)\right) \tag{3}$$

um $x = 0$ bis zur vierten Ordnung in x. Hierbei ist $\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ der sogenannte Kosinus hyperbolicus.

c) **2 Punkte**

Die Tayloreihe von

$$h(x) = 3^x \tag{4}$$

um $x = 1$ bis zur vierten Ordnung in $(x - 1)$.

d) **2 Punkte**

Die Tayloreihe von

$$k(x) = \arctan(x) \tag{5}$$

um $x = 5$ bis zur vierten Ordnung in $(x - 5)$.

3. Präsenzaufgabe: Visualisierung von Taylorreihen **4 Punkte**

a) **2 Punkte**

Ein Plattenkondensator der Kapazität C werde über einen Widerstand R durch eine Spannungsquelle der Spannung U aufgeladen. Man kann dann zeigen, dass die die Ladung $\pm Q(t)$ auf den Kondensatorplatten als Funktion der Zeit durch

$$Q(t) = C\,U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{6}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $Q(t)$ für kleine und große Zeiten durch eine Taylor-Entwicklung von $Q(t)$ bis zur ersten Ordnung. Stellen Sie die Funktion $Q(t)$ und die beiden Näherungen bei kleinen und großen Zeiten in einem Plot dar.

b) **2 Punkte**

Ein Federpendel der Masse $m > 0$ und mit Federkonstante $D > 0$ hat als Funktion der Zeit die Auslenkung

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t\right). \tag{7}$$

Bestimmen Sie die Entwicklung von $x(t)$ um $t = 0$ zur führenden Ordnung und stelle Sie diese gemeinsam mit $x(t)$ dar.