Institut für Theoretische Physik
TU Dresden

Prof. Dr. M. Vojta
PD Dr. M. Garst

Thermodynamik und Statistische Physik — Übung 10

Wintersemester 2018/19

Link: https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tfp/studium/lehre/ws18/tds

1. Freie nichtrelativistische Fermionen und Bosonen (12 Punkte)

Die Fermi-Dirac-Funktionen $f_\nu(z)$ und die Bose-Einstein-Funktionen $g_\nu(z)$ als Funktion der Fugazität $z = e^{\mu/k_B T}$ sind für $\nu > 0$ wie folgt definiert,

$$f_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}\mathrm{d}x}{z^{-1}e^x + 1}, \qquad g_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}\mathrm{d}x}{z^{-1}e^x - 1},$$

mit der Γ-Funktion $\Gamma(\nu)$.

a) Zeigen Sie, dass für $\nu > 1$ gilt $z\partial_z f_\nu(z) = f_{\nu-1}(z)$ und $z\partial_z g_\nu(z) = g_{\nu-1}(z)$.
Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration.

b) Zeigen Sie, dass für ein dreidimensionales Gas freier nichtrelativistischer Fermionen mit Spin s die Relationen

$$\begin{aligned} &(i) \quad \frac{P}{k_B T} = \frac{(2s+1)}{\lambda_T^3} f_{5/2}(z) \qquad (ii) \quad \frac{N}{V} = \frac{(2s+1)}{\lambda_T^3} f_{3/2}(z) \\ &(iii) \quad U = \frac{3}{2} N k_B T \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \qquad (iv) \quad P = \frac{2}{3}\frac{U}{V} \\ &(v) \quad \frac{C_V}{N k_B} = \frac{15}{4}\frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \frac{9}{4}\frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)} \end{aligned} \tag{1}$$

gelten, wobei $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ die thermische de-Broglie-Wellenlänge ist.

c) Zeigen Sie, dass für ein dreidimensionales Gas freier nichtrelativistischer und nichtkondensierter Bosonen dieselben Relationen wie in Teilaufgabe **a)** gelten, wenn man $f_\nu(z)$ durch $g_\nu(z)$ ersetzt.

d) Zeigen Sie, dass $f_\nu(z) \approx z$ für kleine $0 < z \ll 1$ und $f_\nu(z) \approx \frac{(\ln z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$ für große $z \gg 1$. Um letztere Relation zu zeigen, substituieren Sie z.B. $x = s\ln(z)$ in der Integraldarstellung für f_ν. Nutzen Sie diese Resultate, um PV, U und C_V für Fermionen in den Grenzfällen kleiner und hoher Temperaturen zu diskutieren.

2. Graphen bei schwacher Dotierung (8 Punkte)

Das Halbmetall Graphen besteht aus einer Monolage von Kohlenstoffatomen, die bienenwabenförmig angeordnet sind. In einem sogenannten Tight-Binding-Modell für die Leitungselektronen geht als einziger freier Parameter das Überlappungsintegral t benachbarter p_z-Orbitale ein. Die in diesem Modell analytisch berechenbare Zustandsdichte ist in Abb. 1 dargestellt, wobei die Energieskala so gewählt wurde, dass die Fermienergie ε_F des reinen Kohlenstoffsystems gerade bei Null liegt. Dabei steuert jedes der N Kohlenstoffatome genau ein Außenelektron zur

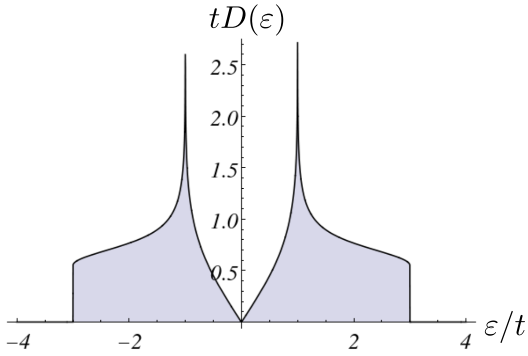

Abbildung 1: Tight-Binding-Zustandsdichte für Graphen in Umgebung der Fermi-Energie.

Elektronenzahl N_e und zwei Zustände zur abgebildeten Zustandsdichte bei. Für nicht zu große Abweichungen der Energie von Null kann die Zustandsdichte entwickelt werden und man erhält

$$D(\varepsilon) \approx \frac{4\varepsilon}{\sqrt{3}\pi t^2} + \dots \tag{2}$$

a) Ersetzt man einen Teil der Kohlenstoffatome durch Atome der fünften Hauptgruppe, führt das zu einem Elektronenüberrschuss, d.h. es gilt dann $N_e > N$. Bestimmen Sie die Fermienergie bei gegebener Dotierung δ mit $\delta = \frac{N_e - N}{N}$. *Hinweis:* Bei genügend kleiner Dotierung ist auch die Abweichung der Fermienergie des dotierten Systems von Null klein. Es reicht deshalb aus, sich auf das lineare Glied der Zustandsdichte zu beschränken.

b) Berechnen Sie für das dotierte System die Verschiebung des chemischen Potentials mit der Temperatur für kleine Temperaturen. Benutzen Sie hier und im folgenden die Sommerfeldentwicklung und diskutieren Sie deren Gültigkeitsgrenzen.

c) Zeigen Sie für das dotierte System, dass die Wärmekapazität C für kleine Temperaturen in die Form $C = N\gamma T$ gebracht werden kann, und bestimmen Sie den linearen Temperaturkoeffizienten γ als Funktion von δ und t.

3. Magnonen und Blochsches $T^{\frac{3}{2}}$-Gesetz (7 Punkte)

Ferromagnetische Substanzen besitzen bosonische Elementaranregungen, sogenannte Magnonen, deren Dispersion für kleine Energien ($\varepsilon \leq \varepsilon_{max}$) näherungsweise gegeben ist durch $\varepsilon(\vec{k}) = Ak^2$ mit $k = |\vec{k}|$ und einer konstanten Steifigkeit A. Für Magnonen gilt keine Teilchenzahlerhaltung.

a) Geben Sie die mittlere Besetzungszahl $\langle n(\varepsilon)\rangle$ einer Magnonenmode mit der Energie ε an.

b) Wie lautet die Zustandsdichte $D(\varepsilon)$?

c) Welche Temperaturabhängigkeit haben die mittlere Energie und die Wärmekapazität der Magnonen im Grenzfall kleiner Temperaturen $k_B T \ll \varepsilon_{max}$?
Hinweis: $\int_0^\infty dx \, \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\zeta(5/2)$ mit der Zeta-Funktion $\zeta(5/2) \approx 1.34....$