Institut für Theoretische Physik
TU Dresden

Prof. Dr. M. Vojta
PD Dr. M. Garst

Thermodynamik und Statistische Physik — Übung 11

Wintersemester 2018/19

Link: https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tfp/studium/lehre/ws18/tds

1. Bose-Einstein-Kondensation in Atomfallen (20 Punkte)

In der Vorlesung wurde der idealisierte Fall eines uniformen Bose-Gases betrachtet, bei dem die Bose-Teilchen in einem Kasten mit Volumen V eingeschlossen sind. Hier soll die Bose-Einstein-Kondensation in Atomfallen behandelt werden, die von Eric Cornell, Wolfgang Ketterle und Carl Wieman im Labor erstmals nachgewiesen wurde, und für die es im Jahre 2001 den Physik-Nobelpreis gab. Im Experiment kühlt man Alkaliatome in magneto-optischen Fallen ab. Letztere erzeugen mit guter Genauigkeit ein im Allgemeinen asymmetrisches Oszillatorpotential

$$V(x,y,z) = \frac{m}{2}\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right). \tag{1}$$

Um Bose-Einstein-Kondensation zweifelsfrei nachweisen zu können, war es nötig, die thermodynamischen Eigenschaften eines im Potential $V(x,y,z)$ befindlichen Bose-Gases zu verstehen. Diese unterscheiden sich teilweise drastisch vom uniformen Fall ohne Potential $V(x,y,z) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass die Einteilchen-Eigenenergien eines im Potential $V(x,y,z)$ befindlichen Teilchens (also des dreidimensionalen harmonischen Oszillators) durch

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \hbar\left\{\omega_x\left(n_x+\frac{1}{2}\right) + \omega_y\left(n_y+\frac{1}{2}\right) + \omega_z\left(n_z+\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{2}$$

gegeben sind. *Hinweis:* Verwendet Sie den Separationsansatz für die Wellenfunktion.

b) Betrachten Sie den im Falle von Bose-Einstein-Kondensation in einer dreidimensionalen Atomfalle makroskopisch besetzten Zustand. Welche Wellenfunktion hat dieser in Orts- bzw. Impulsdarstellung? Wie sieht die entsprechende Dichte- bzw. Geschwindigkeitsverteilung aus? Was ist das typische Volumen, welches das Kondensat in diesem Zustand einnimmt? Vergleichen Sie mit der Situation des uniformen Bose-Gases. Was ist qualitativ anders durch die Existenz des äußeren Potentials?

c) Wir nehmen nun an, dass sich N Bosonen im Potential $V(x,y,z)$ befinden. Zeigen Sie ausgehend von der bosonischen Besetzungszahlverteilung, dass

$$N = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \sum_{n_x,n_y,n_z} e^{-j\beta\tilde{E}_{n_x,n_y,n_z}} = \frac{\tilde{z}}{1-\tilde{z}} + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \sum_{n_x,n_y,n_z>0} e^{-j\beta\tilde{E}_{n_x,n_y,n_z}} \tag{3}$$

gilt, mit $\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$, der Fugazität $\tilde{z} = \exp\{\beta[\mu - \frac{\hbar}{2}(\omega_x+\omega_y+\omega_z)]\}$ und $\tilde{E}_{n_x,n_y,n_z} = E_{n_x,n_y,n_z} - \frac{\hbar}{2}(\omega_x+\omega_y+\omega_z)$. Hier ist $N_0 = \tilde{z}/(1-\tilde{z})$ die Besetzungszahl des Einteilchenzustandes mit der niedrigsten Energie. Im Grenzfall hoher Temperatur, d.h. $k_\mathrm{B}T \gg \max\{\hbar\omega_x, \hbar\omega_y, \hbar\omega_z\}$, kann man die Summe über angeregte Zustände durch ein Integral ersetzen,

$$\sum_{n_x,n_y,n_z>0} \cdots \to \int_0^\infty dn_x \int_0^\infty dn_y \int_0^\infty dn_z \cdots . \tag{4}$$

Werten Sie diese aus, um $(N - N_0)$ als Funktion der Fugazität und der Temperatur zu finden. Zeigen Sie, dass $\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$ für $T < T_c$ und finden Sie T_c. *Hinweis:* Der hier betrachtete Hochtemperatur-Grenzfall bezieht sich auf die Grundzustandsenergie, $k_{\mathrm{B}}T \gg \max\{\hbar\omega_x, \hbar\omega_y, \hbar\omega_z\}$, und ist nicht zu verwechseln mit dem Grenzfall sehr hoher Temperaturen, in dem sich das Gas letztendlich klassisch verhält.

d) Mittels der Zustandsdichte einer dreidimensionalen Atomfalle

$$D(E) = \frac{1}{V} \sum_{n_x,n_y,n_z>0} \delta(E - \tilde{E}_{n_x,n_y,n_z}) \tag{5}$$

lässt sich die Zahl von Bose-Teilchen in angeregten Zuständen allgemein schreiben als

$$N - N_0 = V \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \int_0^{\infty} dE\, D(E) e^{-j\beta E}. \tag{6}$$

Betrachten Sie nun ein harmonisches Potential in $d = 1, 2, 3$ Dimensionen. Bestimmen Sie $D(E)$ und berechnen Sie $(N - N_0)$ für diese drei Fälle. Hier betrachten wir wieder den Grenzfall hoher Temperaturen, so dass Sie die Summe in Gleichung (5) durch das Integral nähern können. Für welches d tritt Bose-Einstein-Kondensation in einer Atomfalle auf? Wie hängt jeweils T_c von der Teilchendichte ab? *Hinweis:* Um die Zustandsdichte zu berechnen, verwenden Sie die Relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\Theta(E) = \delta(E)$.

e) Bestimmen Sie die Zustandsdichte des uniformen Bose-Gases in d räumlichen Dimensionen

$$D_u(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int d^d p\, \delta(E - \frac{p^2}{2m}) \tag{7}$$

und berechnen Sie $(N - N_0)$. Für welches d tritt Bose-Einstein-Kondensation nun auf? Wie hängt T_c von der Teilchendichte ab? Begünstigt oder erschwert ein äußeres Potential das Auftreten von Bose-Einstein-Kondensation bei kleinen Teilchendichten?

f) In den experimentell realisierten Bose-Gasen in Atomfallen ist die Teilchenzahl üblicherweise im Bereich von $10^4 \cdots 10^6$ und T_c deshalb so klein, dass Korrekturen zu der Näherung (4) wichtig werden. Finden Sie die führende Korrektur zu $(N - N_0)$, indem Sie Gleichung (3) in führender Ordnung im Hochtemperaturlimes auswerten. *Hinweis:* Die Summe $\sum_{n_x,n_y,n_z}$ ist das Produkt dreier geometrischer Reihen. Summieren Sie diese nach der bekannten Formel, bevor Sie N_0 abziehen und die Hochtemperaturentwicklung vornehmen.