Institut für Theoretische Physik
TU Dresden

Prof. Dr. M. Vojta
PD Dr. M. Garst

Thermodynamik und Statistische Physik — Übung 2

Wintersemester 2018/19

Link: https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tfp/studium/lehre/ws18/tds

1. Thermodynamische Beziehungen (10 Punkte)

a) Leiten Sie mit Hilfe des Funktionaldeterminantenkalküls folgende Beziehungen her:

$$(i) \quad C_P - C_V = TV\alpha^2/\kappa_T, \qquad (ii) \quad \kappa_T - \kappa_S = TV\alpha^2/C_P.$$

Hinweis: Benutzen Sie z.B. um (i) herzuleiten die Relation

$$\frac{\partial(S,V)}{\partial(T,V)} = \frac{\frac{\partial(S,V)}{\partial(T,P)}}{\frac{\partial(T,V)}{\partial(T,P)}},$$

und verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabe **3c** von Übungsblatt 1.

b) Ein allgemeines Stabilitätskriterium in der Thermodynamik besagt, dass im thermodynamischen Gleichgewicht bei konstanter Temperatur eine Volumenzunahme niemals eine Druckzunahme nach sich ziehen kann. Hält man andererseits das Volumen konstant und erhöht die Temperatur, dann kann die Entropie niemals abnehmen. Zeigen Sie, dass hieraus folgt $C_P \geq C_V \geq 0$ und $\kappa_T \geq \kappa_S$.

c) Zeigen Sie weiterhin, dass $\kappa_S \geq 0$. *Hinweis*: Benutzen Sie die Relation

$$\frac{\partial(V,S)}{\partial(P,S)} = \frac{\frac{\partial(V,S)}{\partial(V,T)}}{\frac{\partial(P,S)}{\partial(V,T)}}.$$

2. Thermodynamische Potentiale des idealen Gases (13 Punkte)

Ein ideales Gas mit Teilchenzahl N genügt der (i) thermischen Zustandgleichung als auch den kalorischen Zustandsgleichungen für (ii) die innere Energie und (iii) die Enthalpie

$$(i) \quad PV = kNT, \qquad (ii) \quad U = c_v NT, \qquad (iii) \quad H = c_p NT,$$

mit den Konstanten k, c_v und c_p.

a) Betrachten Sie zunächst ein ideales Gas mit konstanter Teilchenzahl N, d.h. $dN = 0$, und berechnen Sie die Entropie $S(T, V, N)$. Betrachten Sie hierfür das totale Differential der inneren Energie, lösen nach dS auf und integrieren mit Hilfe der Zustandsgleichungen bezüglich einem Referenzzustand mit Entropie $S_0 = s_0 N$, Temperatur T_0 und Volumen $V_0 = v_0 N$, so dass $S(T_0, V_0, N) = S_0$ mit der Entropie und Volumen pro Teilchen, s_0 und v_0. Wiederholen Sie die Rechnung nun aber für das totale Differential der Enthalpie und zeigen Sie, dass gilt $c_p - c_v = k$.

b) Berechnen Sie die innere Energie $U(S,V,N)$ und die Enthalpie $H(S,P,N)$ mit Hilfe des Ergebnisses aus **a)** und den kalorischen Zustandsgleichungen.

c) Berechnen Sie aus $U(S,V,N)$ die (Helmholtzsche) freie Energie $F(T,V,N)$, die (Gibbssche) freie Enthalpie $G(T,P,N)$ und das chemische Potential $\mu(T,V,N)$.

d) Zeigen Sie, dass das großkanonische Potential gegeben ist durch $\Omega(T,V,\mu) = -kTN(T,V,\mu)$ und bestimmen Sie die Teilchenzahl $N(T,V,\mu)$ mit Hilfe des chemischen Potentials aus **c)**.

e) Berechnen Sie weiterhin $P(T,V,\mu)$ und $\mu(T,P,N)$. Zeigen Sie explizit, dass

$$G(T,P,N) = \mu(T,P,N) \cdot N \quad \text{und} \quad \Omega(T,V,\mu) = -P(T,V,\mu) \cdot V, \tag{1}$$

sowie die Gibbs-Duhem-Beziehung gilt:

$$U(T,V,N) = S(T,V,N) \cdot T - P(T,V,N) \cdot V + \mu(T,V,N) \cdot N. \tag{2}$$

3. Reversibler und irreversibler Temperaturausgleich (10 Punkte)

Gegeben seien zwei Metallblöcke mit konstanten Volumina V_1 und V_2, Anfangstemperaturen T_1 und T_2 und temperaturabhängigen Wärmekapazitäten $C_{V_1}(T) = \gamma_1 T$ und $C_{V_2}(T) = \gamma_2 T$ ($\gamma_{1,2} > 0$). Das Gesamtsystem sei nach außen wärmeisoliert, d.h. die Blöcke können Wärme nur untereinander, nicht aber mit der Umgebung austauschen.

a) Die beiden Körper werden in thermischen Kontakt zueinander gebracht. Wie groß ist die gemeinsame Endtemperatur $T_{M,irr}$?

b) Der Temperaturausgleich werde auf vollkommen reversible Weise erreicht, dazu soll der Wärmeaustausch über eine Carnot-Maschine mit einem idealen Arbeitsgas erfolgen. Eine Carnot-Maschine ist eine ideale Wärmekraftmaschine, die einen Carnot-Prozess realisiert. Jeder differentielle Kreisprozess transportiert eine infinitesimale Wärmemenge von T_2 nach T_1, indem er bei T_2 isotherm Wärme aufnimmt, diese adiabatisch transportiert und bei T_1 isotherm Wärme abgibt. Danach kehrt man adiabatisch zur Ausgangslage zurück. Berechnen Sie die vom idealen Gas bei T_2 aufgenommene Wärme δQ_2 und die bei T_1 abgegebene Wärme $-\delta Q_1$, eliminieren Sie $C_{V,Gas}$ und ermitteln Sie dann aus den zugeführten bzw. abgeführten Wärmemengen die resultierenden Temperaturänderungen dT_1 und dT_2 an den Metallblöcken. Was ist nun die Endtemperatur $T_{M,rev}$?

c) Zeigen Sie, dass für den reversiblen Temperaturausgleich die Endtemperatur in Wirklichkeit unabhängig von den Einzelheiten der Prozess-Realisierung des reversiblen Wärmetransports ist, d.h. jeder beliebige reversible Kreisprozess und jedes beliebige Arbeitsmittel kann verwendet werden.