

---

# Thermodynamik und Statistische Physik — Übung 3

Wintersemester 2018/19

---

Link: <https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tfp/studium/lehre/ws18/tds>

## 1. Reale Gase (12 Punkte)

Helium, Argon, Sauerstoff und Stickstoff verhalten sich bei Normalbedingungen wie ideale Gase. Geht man aber zu höheren Dichten oder niedrigeren Temperaturen, stellt man Abweichungen vom idealen Verhalten fest. Die Ursachen dieser Abweichungen liegen sowohl an dem Eigenvolumen der Gasteilchen als auch an der Wechselwirkung der Gasteilchen untereinander. Solange diese Abweichungen klein sind, lassen sie sich durch kleine Korrekturen erfassen. So gab VAN DER WAALS die folgende, nach ihm benannte thermische Zustandsgleichung (Nobelpreis 1910) als Näherung für reale Gase an:

$$P = \frac{NkT}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}, \quad (1)$$

wobei  $k$ ,  $a$  und  $b$  Konstanten sind. Aus der Form der Gleichung erkennt man, dass  $a$  die Wechselwirkung der Gasteilchen und  $b$  ihr Eigenvolumen berücksichtigt.

- a) Zeigen Sie, dass die spezifische Wärme  $C_V$  nicht vom Volumen abhängt, d.h.,  $(\partial C_V / \partial V)_T = 0$ .
- b) Berechnen Sie die kalorische Zustandsgleichung für die innere Energie  $U(T, V, N)$  mit  $T = T(S, V, N)$  und gehen hierfür wie folgt vor. Zeigen Sie zunächst allgemein, dass  $(\partial U / \partial V)_T = T(\partial P / \partial T)_V - P$ . Berechnen Sie die rechte Seite dieser Gleichung mit Hilfe der Zustandsgleichung (1) und integrieren Sie das Ergebnis bezüglich  $V$ . Um die Integrationskonstante zu bestimmen, benutzen Sie, dass im Limes großer Volumina die Zustandsgleichung des idealen Gases reproduziert werden muss, d.h.  $\lim_{V \rightarrow \infty} U(T, V, N) = C_V T$  mit  $C_V$  des idealen Gases.
- c) Welche Temperaturänderung tritt bei der freien Expansion des Gases ins Vakuum auf, wenn der Anfangszustand durch  $(T_1, V_1)$  und der Endzustand durch  $(T_2, V_2)$  gegeben ist? Wie hängt diese vom Vorzeichen der Wechselwirkungskonstante  $a$  ab?
- d) Bestimmen Sie für eine adiabatische Zustandsänderung den Zusammenhang zwischen  $T$  und  $V$  bzw.  $P$  und  $V$ . Zeigen Sie, dass diese Relationen für  $a = b = 0$  die Poissonsche Gesetze für das ideale Gas reproduzieren.

## 2. Joule-Thomson-Prozess (8 Punkte)

Bei der sogenannten gedrosselten Entspannung wird ein Gasvolumen  $V_a$  in einem wärmeisolierten Zylinder durch ein Drosselventil bzw. eine poröse Wand gedrückt, wobei die unterschiedlichen Drücke auf beiden Seiten ( $P_a > P_e$ ) des Ventils konstant gehalten werden. Das Endvolumen des Gases ist dann  $V_e > V_a$ .

- a) Zeigen Sie, dass bei diesem Versuch die Enthalpie  $H$  konstant bleibt.

- b) Der Joule-Thomson-Koeffizient,  $\delta = (\partial T / \partial P)_H$ , charakterisiert die Änderung der Temperatur im Joule-Thomson-Prozess. Zeigen Sie, dass allgemein gilt:

$$\delta \equiv \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{T^2}{C_P} \left( \frac{\partial}{\partial T} \frac{V}{T} \right)_P. \quad (2)$$

*Hinweis:* Benutzen Sie z.B. Aufgabe **3b)** von Übungsblatt 1.

- c) Betrachten Sie den Joule-Thomson-Prozess für ein ideales Gas. Wie groß ist  $\delta$  und die Temperaturänderung des idealen Gases? Wie groß ist die Änderung der Entropie?
- d) Zeigen Sie, dass allgemein gilt  $\left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_S - \frac{V}{C_P}$ . Folgern Sie hieraus, dass die reversible adiabatische Entspannung effektiver ist als der isenthalpe Joule-Thomson-Prozess, um eine Temperaturverringerung zu erhalten.

### 3. Joule-Prozess (10 Punkte)

Der Joule-Prozess dient als reversibler Vergleichsprozess für den Kreisprozess einer Gasturbine. Er besteht aus den folgenden vier Prozessschritten:

- 1  $\rightarrow$  2: adiabatische (=isentrop) Kompression von  $V_1$  auf  $V_2$ ,
- 2  $\rightarrow$  3: isobare Erwärmung von  $T_2$  auf  $T_3$ ,
- 3  $\rightarrow$  4: adiabatische(=isentrop) Expansion von  $V_3$  auf  $V_4$ ,
- 4  $\rightarrow$  1: isobare Abkühlung von  $T_4$  auf  $T_1$ .

Das Arbeitsgas wird als ideales Gas mit fester Teilchenzahl  $N$  und Wärmekapazität  $C_V$  betrachtet. Die Ausgangstemperatur  $T_1$ , die Turbinentemperatur  $T_3$  als auch der Turbinenein- bzw. Austrittsdruck  $P_3$  bzw.  $P_4$  seien bekannt.

- a) Bestimmen Sie  $P(V)$  für die Adiabaten und stellen Sie den Kreisprozess im  $P$ - $V$ -Diagramm dar.
- b) Bestimmen Sie  $T(S)$  für die Isobaren und stellen Sie den Kreisprozess im  $T$ - $S$ -Diagramm dar.
- c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad  $\eta = \frac{W}{Q_{23}}$  als Funktion der Temperaturen  $T_1, T_2, T_3$  und  $T_4$ . Dabei ist  $W$  die vom System geleistete Arbeit und  $Q_{23}$  die dem System zugeführte Wärme.
- d) Drücken Sie mit Hilfe der Poissonsche Gleichungen den Wirkungsgrad durch das Druckverhältnis  $P_1/P_2$  aus. Steigt oder fällt  $\eta$  mit dem Adiabatenexponenten  $\kappa = C_P/C_V$ ?