Institut für Theoretische Physik
TU Dresden

Prof. Dr. M. Vojta
PD Dr. M. Garst

Thermodynamik und Statistische Physik — Übung 4

Wintersemester 2018/19

Link: https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tfp/studium/lehre/ws18/tds

1. Würfel (8 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $W(n)$ dafür, dass beim Würfeln mit zwei idealen Würfel mit Augenzahlen n_1 und n_2 die Summe der geworfenen Augen den Wert $n = n_1 + n_2$ hat mit $2 \leq n \leq 12$. Bestimmen Sie hierfür die Anzahl der Möglichkeiten z_n, die Summe n mit den Augenzahlen n_1 und n_2 zu realisieren. Berechnen Sie den Mittelwert $\langle n \rangle$ und die Schwankung Δn.

b) Bei einem Spiel werden sechs ideale Würfel geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass (*i*) genau eine Eins, (*ii*) mindestens eine Eins und (*iii*) genau zwei Einsen geworfen werden.

2. Laplacesche Methode (2 Punkte)

Die Laplacesche Methode erlaubt die Bestimmung des asymptotischen Verhaltens im Limes $\lambda \to \infty$ von Integralen der Form

$$I(\lambda) = \int_a^b dt\, f(t) e^{\lambda \phi(t)}. \tag{1}$$

Die Funktionen f und ϕ sind hier reelle kontinuierliche Funktionen definiert auf dem reellen Intervall $[a, b]$. Weiterhin besitzt ϕ ein Maximum bei $t = t_0$ mit $t_0 \in (a, b)$. In diesem Fall wird das asymptotische Verhalten von $I(\lambda)$ nur von der unmittelbaren *lokalen* Umgebung um den Punkt t_0 bestimmt. Hierzu betrachten wir das Hilfsintegral

$$I(\lambda; \varepsilon) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} dt\, f(t) e^{\lambda \phi(t)} \tag{2}$$

mit einem beliebigen $\varepsilon > 0$, so dass $b > t_0 + \varepsilon$ und $t_0 - \varepsilon > a$. Nun gilt, dass im Limes $\lambda \to \infty$ das asymptotische Verhalten von $I(\lambda; \varepsilon)$ zum einen von ε unabhängig ist und zum anderen mit dem von $I(\lambda)$ übereinstimmt, d.h., $I(\lambda) \sim I(\lambda; \varepsilon)$. Für weitere Informationen siehe z.B. C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (Springer 1999).

Bestimmen Sie das führende asymptotische Verhalten von $I(\lambda)$, indem Sie die Funktionen f und ϕ im Ausdruck $I(\lambda; \varepsilon)$ in eine Taylor-Reihe um t_0 entwickeln und die Taylor-Reihe der Funktion f nach der nullten Ordnung und die Reihe der Funktion ϕ nach der zweiten Ordnung abbrechen. Um das resultierende Integral im Limes $\lambda \to \infty$ zu berechnen, substitutieren Sie zunächst $x = \sqrt{\lambda}(t - t_0)$ und betrachten danach den Limes $\lambda \to \infty$. *Hinweis:* $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{2\pi}\sigma$.

3. Stirlingsche Formel (7 Punkte)

Die Gamma-Funktion hat für $x > 0$ die Integraldarstellung

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, e^{-t}\, t^{x-1}. \tag{3}$$

a) Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für natürliche Zahlen $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $N! = \Gamma(N+1)$.

b) Leiten Sie das asymptotische Verhalten von $\Gamma(x)$ im Limes $x \to \infty$ her. Substituieren Sie hierfür zunächst in der Integraldarstellung (3) die Integrationsvariable $t = xs$. Identifizieren Sie im resultierenden Ausdruck ein Integral über s von der Fom von Gleichung (1) mit $\lambda = x$ und verwenden Sie die Laplaceschen Methode.

c) Leiten Sie mit Hilfe von **a)** und **b)** die Stirlingsche Formel her: $N! \sim \sqrt{2\pi N} e^{-N} N^N$ für große N.

4. Wahrscheinlichkeiten und Entropie (6 Punkte)

a) Die Entropie für die Wahrscheinlichkeitsverteilung w_μ für Ereignisse X_μ mit $\mu = 1, \ldots, \Gamma$ ist gegeben durch $S = -k \sum_\mu w_\mu \ln w_\mu$. Zeigen Sie, dass die Entropie S maximal wird, wenn für die Ereignisse Gleichverteilung angenommen wird, d.h. $w_\mu = 1/\Gamma$, und der Maximalwert gegeben ist durch $S = k \ln \Gamma$.

b) Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Ereignissen zusammengesetzten Charakters, die nicht statistisch unabhängig sind, d.h. für die gilt $w_{\nu\mu} = w_{\mu/\nu} \cdot w_\nu$. Hierbei ist w_ν die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis X_ν und $w_{\mu/\nu}$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für Ereignis Y_μ, wenn vorher das Ereignis X_ν eingetreten ist. Betrachten Sie die Entropie $S = -k \sum_\mu \sum_\nu w_{\nu\mu} \ln w_{\nu\mu}$ und drücken Sie diese mit Hilfe der Entropien $S_X = -k \sum_\nu w_\nu \ln w_\nu$ und $S_\nu = -k \sum_\mu w_{\mu/\nu} \ln w_{\mu/\nu}$ aus. Diskutieren Sie die Entropie auch für den Spezialfall der statistischen Unabhängigkeit, wenn gilt $w_\mu = w_{\mu/\nu}$. *Hinweis:* Es gilt allgemein $\sum_\mu w_{\mu/\nu} = 1$.

5. Binomialverteilung und Poissonverteilung (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Binomialverteilung

$$\rho_N^B(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

sich im Grenzfall $p \ll 1$ und $n \ll N$ auf die Poissonverteilung

$$\rho_N^P(n) = \frac{(Np)^n}{n!} e^{-Np}$$

reduziert.