Thermodynamik und Statistische Physik — Übung 5

Wintersemester 2018/19

Link: https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tfp/studium/lehre/ws18/tds

1. Volumen der d-dimensionalen Kugel (5 Punkte)

Aus Symmetrie- und Dimensionsbetrachtungen folgt für das Volumen einer Kugel mit Radius r in einem d-dimensionalen Raum $V_d(r) = \frac{\Omega_d}{d}\, r^d$. Die Konstante Ω_d ist dabei der volle Raumwinkel, $dV_d(r) = \Omega_d r^{d-1} dr$. Bestimmen Sie Ω_d für allgemeines d, indem Sie das Integral

$$\int\limits_0^\infty e^{-r^2}\, dV_d(r) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2+\dots+x_d^2)}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_d \tag{1}$$

sowohl in kartesischen Koordinaten als auch in Kugelkoordinaten, entsprechend der rechten und linken Seite der obigen Gleichung, auswerten. Bestimmen Sie Ω_d explizit für die bestimmten Werte von $d \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 3 von Übungsblatt 4.

2. Elementare Phasenraumzelle - Halboszillator (9 Punkte)

a) Betrachten Sie ein klassisches Teilchen der Masse m im eindimensionalen Potential

$$V(q) = \begin{cases} \frac{m\omega^2}{2} q^2 & \text{für} \quad q \geq 0 \\ \infty & \text{für} \quad q < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Welche Form hat die Kurve $H(p, q) = E$ im Phasenraum? Berechnen Sie das dimensionsbehaftete Phasenraumvolumen $\tilde{\Gamma}(E)$, das von dieser Kurve eingeschlossen wird.

b) Behandeln Sie nun das gleiche Problem quantenmechanisch. Um das Energiespektrum zu bestimmen, verwenden Sie die bekannten Resultate des gewöhnlichen harmonischen Oszillators und berücksichtigen Sie die Randbedingungen bei $q = 0$. Bestimmen Sie die Zahl der Zustände $\Omega(E)$ mit einer Energie kleiner als E. Welche Forderung muss an das Verhältnis von $E/(\hbar\omega)$ gestellt werden, damit das quantenmechanische Resultat $\Omega(E)$ in den klassischen Grenzfall übergeht? Ermitteln Sie durch Vergleich mit **a)** die Größe der elementaren Phasenraumzelle.

3. Entropie und Zustandsdichte eines klassischen Systems (11 Punkte)

Wir betrachten ein klassisches N-Teilchen-System mit der Hamilton-Funktion $H(p_1, ..., p_N, ..., q_1, ..., q_N)$. $\Omega(E)$ sei das Phasenraumvolumen bezüglich der N-dimensionalen Phasenraumzelle, für das gilt $H(p_1, ..., p_N, ..., q_1, ..., q_N) \leq E$,

$$\Omega(E) = \underbrace{\int \frac{dp_1\, dq_1}{2\pi\hbar} \cdots \int \frac{dp_N\, dq_N}{2\pi\hbar}}_{H(p_1,...,p_N,...,q_1,...,q_N)\leq E} 1 = \int d\Gamma\, \Theta(E - H), \tag{3}$$

mit der Theta-Funktion $\Theta(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$. Die Zustandsdichte $D(E)$ gibt die Anzahl der Zustände auf der Hyperfläche $E = const.$ an und ist gegeben durch $D(E) = \frac{\partial\Omega(E)}{\partial E} = \int_\Gamma d\Gamma\,\delta(E - H)$.

a) Zeigen Sie, dass die Zustandsdichte eines Systems aus N (unterscheidbaren) klassischen Oszillatoren mit der gleichen Eigenfrequenz ω und Masse m gegeben ist durch

$$D(E) = \frac{1}{(N-1)!}\frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^{N-1}. \tag{4}$$

Für die Herleitung gehen Sie wie folgt vor. Berechnen Sie zunächst $\Omega(E)$, indem Sie die Integrationsvariablen mit Hilfe der Oszillatorlänge $\lambda = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ so substituieren, dass das Integral sich auf das Volumen einer $2N$-dimensionalen Kugel reduziert. Verwenden Sie dann das Ergebnis aus Aufgabe **1**.

b) Betrachten Sie nun den Limes $N \gg 1$ und berechnen Sie die Entropie $S(E, N, V)$ des Systems mit Hilfe $S = k \ln \delta\Omega$ wobei $\delta\Omega(E) = D(E)\delta E$. Welche Bedingung muss die Breite der Energieschale δE erfüllen, damit die Entropie eine extensive Größe ist?

c) Bestimmen Sie aus dem extensiven Anteil der Entropie die thermodynamischen Größen Temperatur T, Druck P und chemisches Potential μ.

4. Untersysteme mit Energieaustausch (6 Punkte)

Betrachtet Sie zwei Systeme bestehend aus N_1 und N_2 Spins in einem Magnetfeld B, die in thermischem Kontakt stehen sollen. Jeder Spin i besitzt das magnetisches Moment $\mu_i = \mu_0\sigma_i$ mit $\sigma_i = \pm 1$ und die Energie $E_i = -\mu_i B$. Energie kann frei von einem zum anderen System übertragen werden; die Gesamtenergie $E = E_1 + E_2$ bleibt aber konstant. Der Energieaustausch kann z.B. durch eine schwache, magnetische Kopplung zwischen den Spins in der Nähe der Trennwand beider Systeme erfolgen. Der Beitrag dieser Kopplung zur Gesamtenergie soll im Folgenden vernachlässigt werden, was für große Systeme eine erlaubte Näherung ist.

a) Wieviel Mikrozustände existieren ingesamt?

b) Die Anzahl der Spins mit der Konfiguration $\sigma_i = +1$ sei n_1 und n_2 in den beiden Subsystemen. Berechnen Sie das gesamte magnetische Moment μ_{ges} und die Gesamtenergie E der beiden Systeme als Funktion von $n = n_1 + n_2$. Wieviele Mikrozustände $g(n)$ existieren für ein vorgegebenes n? Drücken Sie das Ergebnis als Summe aus, $g(n) = \sum_{n_1=0}^{n} g(N_1, n_1)g(N_2, n - n_1)$, und bestimmen Sie die Funktion $g(N, n)$.

c) Zeigen Sie, dass der größte Summand $n_1 = \tilde{n}_1$ in der Summe für $g(n)$ bestimmt ist durch die Bedingung

$$\left.\frac{d\ln g(N_1, n_1)}{dn_1}\right|_{n_1=\tilde{n}_1} = \left.\frac{d\ln g(N_2, n_2)}{dn_2}\right|_{n_2=\tilde{n}_2=n-\tilde{n}_1}. \tag{5}$$

Diese Bedingung bestimmt die wahrscheinlichste Konfiguration des Gesamtsystems bei vorgegebenen E, N_1 und N_2. Zeigen Sie, dass diese Bedingung im Grenzfall $N_1, N_2 \gg 1$ übergeht in $\frac{\tilde{n}_1}{N_1} = \frac{n-\tilde{n}_1}{N_2}$. Dies bedeutet, dass die wahrscheinlichste Konfiguration durch die gleichmäßige Verteilung der $\sigma_i = +1$ Spins auf die beiden Subsysteme gegeben ist.