Institut für Theoretische Physik
TU Dresden

Prof. Dr. M. Vojta
PD Dr. M. Garst

Thermodynamik und Statistische Physik — Übung 7

Wintersemester 2018/19

Link: https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tfp/studium/lehre/ws18/tds

1. Bloch-Gleichungen und Rabi-Oszillationen (10 Punkte)

Gegeben sei der zeitabhängigen Hamilton-Operator eines Zwei-Niveau-Systems

$$\mathcal{H}(t) = \hbar\omega_0\sigma^z - \Delta\cos(\omega t)\sigma^x, \tag{1}$$

mit den Pauli-Matrizen σ^x und σ^z.

a) Betrachten Sie den dazugehörigen Dichteoperator in der Parametrisierung von Aufgabe 3 auf Übungsblatt 6. Bestimmen Sie mit Hilfe der von-Neumann-Gleichung die Bewegungsgleichung des Vektors $\vec{n}(t) = \mathrm{Sp}\{\hat{\rho}(t)\vec{\sigma}\}$. Bringen Sie diese in die Form von Bloch-Gleichungen, $\partial_t\vec{n}(t) = \vec{n}(t) \times \vec{\Omega}(t)$, und bestimmen Sie $\vec{\Omega}(t)$.

b) Betrachten Sie zunächst den Fall $\Delta = 0$ und lösen Sie die Bewegungsgleichung für $\vec{n}(t)$. Zeigen Sie, dass die Lösung mit Hilfe einer orthogonalen 3×3-Matrix $U(t)$ mit $U(0) = \mathbb{1}$ geschrieben werden kann, $\vec{n}(t) = U(t)\vec{n}_0$ mit konstantem $\vec{n}_0$.

c) Um den Fall $\Delta \neq 0$ zu betrachten, machen Sie den Ansatz $\vec{n}(t) = U(t)\vec{n}_0(t)$ und leiten Sie die resultierende Bewegungsgleichung für $\vec{n}_0(t)$ her.

d) Betrachten Sie den Resonanzfall $\omega = 2\omega_0$. Vernachlässigen Sie in der Bewegungsgleichung für $\vec{n}_0(t)$ Terme, die mit einer Frequenz $\pm2\omega$ zeitlich oszillieren (rotating wave approximation). Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung dann in der Form $\partial_t\vec{n}_0 = \vec{n}_0(t) \times \vec{\Omega}_R$ geschrieben werden kann. Bestimmen Sie das zeitlich konstante $\vec{\Omega}_R$ und die Lösung $\vec{n}_0(t)$ der sogenannten Rabi-Oszillationen.

2. Reißverschluß-Modell für ein DNS-Molekül (8 Punkte)

Die Mikrozustände eines DNS-Moleküls werden in einem einfachen Modell wie folgt festgelegt.

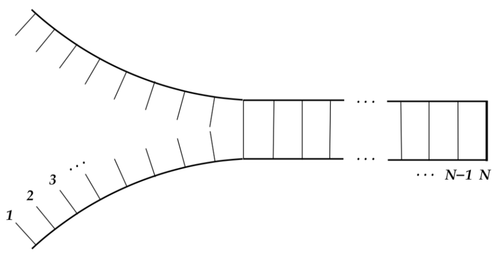

Abbildung 1: DNS-Molekül

Seine beiden Stränge können an numerierten Stellen $j = 1, 2, \ldots, N$ Bindungen eingehen. Eine geschlossene Bindung hat die Energie $\varepsilon_j = 0$, eine geöffnete die Energie $\varepsilon_j = \varepsilon$. Die p^{te} Bindung kann nur dann offen sein, wenn alle Bindungen mit $j < p$ ebenfalls offen sind. Die N^{te} Bindung ist immer geschlossen.

a) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme des DNS-Moleküls.

b) Berechnen Sie die mittlere Zahl $\langle n \rangle$ von offenen Bindungen als Funktion von $x = e^{-\beta\varepsilon}$. Diskutieren Sie den Grenzfall $N \gg 1$ für $\langle n \rangle / N$ und skizzieren Sie das Ergebnis als Funktion von x.

c) Berechnen Sie die Entropie.