Institut für Theoretische Physik
TU Dresden

Prof. Dr. M. Vojta
PD Dr. M. Garst

Thermodynamik und Statistische Physik — Übung 8

Wintersemester 2018/19

Link: https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tfp/studium/lehre/ws18/tds

1. Maxwell-Boltzmann-Verteilung (11 Punkte)

Betrachten Sie ein klassisches Vielteilchensystem mit N ununterscheidbaren Teilchen der Masse m, die sich im Potential $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$ bewegen.

a) Wie lautet die klassische Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N)$ dafür, dass sich das System im Phasenraumraumelement $\prod_{i=1}^{N} d\vec{r}_i d\vec{p}_i$ befindet? Wie lautet die entsprechende Zustandssumme bzw. das Zustandsintegral Z?

b) Betrachten Sie ein einzelnes Teilchen. Argumentieren Sie, dass dessen Impulsverteilung statistisch unabhängig ist sowohl von der Impulsverteilung der anderen Teilchen als auch von der gesamten Ortsverteilung. Nutzen Sie dies, um die normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(\vec{v})$ dafür zu gewinnen, dass das betrachtete Teilchen eine Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{p}/m$ besitzt. Berechnen Sie daraus die normierte Maxwell-Boltzmann-Verteilung $w_{\mathrm{MB}}(v)$ für die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen mit einem Betrag $v = |\vec{v}|$ der Geschwindigkeit vorzufinden.

c) Berechnen Sie die Lage des Maximum von $w_{\mathrm{MB}}(v)$ als auch den Mittelwert $\langle v \rangle$ und vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

d) Berechnen Sie die normierte Wahrscheinlichkeitverteilung $w(\varepsilon)$ für die kinetische Energie $\varepsilon = \frac{m\vec{v}^2}{2}$ des Teilchens. Wie lautet der Mittelwert $\langle \varepsilon \rangle$?

e) Betrachten Sie zwei Teilchen und berechnen Sie den mittleren Betrag der Relativgeschwindigkeit $\langle |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \rangle$.

2. Relativistisches ideales Gas (10 Punkte)

Betrachten Sie ein klassisches relativistisches ideales Gas mit Temperatur T. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Impuls $\vec{p}$ eines Teilchens ist gegeben durch den Boltzmann-Faktor $w(\vec{p}) = \frac{1}{Z_1} \exp(-\frac{\varepsilon(\vec{p})}{kT})$ mit der Energie $\varepsilon(\vec{p}) = mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{p}}{mc}\right)^2}$ und dem Normierungsfaktor $Z_1 = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \exp(-\frac{\varepsilon(\vec{p})}{kT})$.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(\vec{v})$ für die Geschwindigkeit der Teilchen. *Hinweis:* Der Zusammenhang zwischen Impuls und Geschwindigkeit lautet: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Sie müssen die Jacobi-Determinante $|\frac{dp_i}{dv_j}|$ berechnen, um $w(\vec{v})$ zu erhalten.

b) Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(v)$ für den Betrag der Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$? Wo befindet sich das Maximum der Verteilung in den Grenzfällen $kT \ll mc^2$ und $kT \gg mc^2$?

c) Zeigen Sie, dass sich im Limes kleiner Temperaturen, $kT \ll mc^2$, $w(v)$ auf die Maxwell-Boltzmann-Verteilung aus Aufgabe **1** reduziert.

d) Betrachten Sie den Grenzfall großer Temperaturen $kT \gg mc^2$ und zeigen Sie, dass der Mittelwert $\langle v/c \rangle \approx 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{mc^2}{kT}\right)^2$.

3. Schottky-Anomalie (7 Punkte)

Betrachten Sie einen Drehimpulsoperator $\hat{\vec{J}}$ mit $\hat{\vec{J}}^2 = \hbar^2 j(j+1)$ und unbestimmten j. Der Hamilton-Operator lautet $\mathcal{H} = -\frac{\Delta}{\hbar}\hat{J}_z$.

a) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme Z.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Z die spezifische Wärme $C = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$ und diskutieren Sie das Verhalten von C in den Grenzfälle $\Delta \ll kT$ und $\Delta \gg kT$. Zeigen Sie, dass man aus dem Hochtemperaturverhalten prinzipiell j bestimmen kann, wenn Δ bekannt ist. Warum ist das Verhalten bei tiefen Temperaturen hingegen unabhängig von j?