Institut für Theoretische Physik
TU Dresden

Prof. Dr. M. Vojta
PD Dr. M. Garst

Thermodynamik und Statistische Physik — Übung 9

Wintersemester 2018/19

Link: https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/tfp/studium/lehre/ws18/tds

1. (Super-)Paramagnetismus

Wir betrachten die magnetischen Eigenschaften von Systemen aus wechselwirkungsfreien magnetischen Momenten. Dabei können große Momente z.B. von ferromagnetischen Partikeln klassisch behandelt werden, während kleinere Momente wie z.B. die Momente von Seltenerd-Atomen oder von Kernspins quantenmechanisch behandelt werden müssen.

a) Klassische Behandlung:
Betrachten Sie N magnetische Dipole mit Dipolmoment $\vec{\mu}_i$ mit $i = 1, \ldots, N$, wobei der Betrag der Momente für alle Dipole gleich sei: $|\vec{\mu}_i| = \mu$. Ihre Energie in einem Magnetfeld $\vec{B} = \hat{z}B$ entlang der z-Achse ist durch $E = -\mu^z_{\text{tot}} B$ mit $\vec{\mu}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \vec{\mu}_i$ gegeben. Berechnen Sie die Zustandssumme und daraus das mittlere magnetische Moment pro Dipol $\frac{1}{N}\langle \mu^z_{\text{tot}} \rangle$ entlang der z-Achse. Drücken Sie das Ergebnis durch die Langevin-Funktion

$$L(x) = \coth x - \frac{1}{x} \tag{1}$$

aus. Skizzieren Sie $L(x)$. Berechnen Sie die longitudinale Suszeptibilität $\chi \equiv \frac{\partial \langle \mu^z_{\text{tot}}/N \rangle}{\partial B}$. Diskutieren Sie den Hochtemperaturlimes, $kT \gg \mu B$, und zeigen Sie, dass in diesem Fall das Curiegesetz des Paramagnetismus $\chi = C/T$ gilt. Bestimmen Sie die Curiekonstante C.

b) Quantenmechanische Behandlung:
Die N magnetischen Dipole sollen nun quantenmechanisch behandelt werden. Der Hamilton-Operator ist $\mathcal{H} = -\frac{g\mu_0}{\hbar} \sum_{i=1}^N \hat{J}_{i,z} B$ mit einem magnetischen Moment μ_0, dem Landé-Faktor g und dem Magnetfeld B entlang der z-Achse. Der Operator $\hat{J}_{i,z}$ ist die Komponente des Drehimpulsoperators des i-ten Dipols entlang des Magnetfeldes mit den Eigenwerten $\hbar m$ mit $m \in \{-j, -j+1, ..., j-1, j\}$ mit halb- oder ganzzahligem j. Berechnen Sie mit Hilfe der Zustandssumme (siehe Aufgabe 3 von Übungsblatt 8) das mittlere magnetische Moment pro Dipol, $\frac{g\mu_0}{N}\langle \sum_{i=1}^N \hat{J}_{i,z} \rangle$. Das Ergebnis kann durch die Brillouin-Funktion

$$B_j(x) = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \coth\left\{\left(1 + \frac{1}{2j}\right) x\right\} - \frac{1}{2j} \coth\left\{\frac{1}{2j} x\right\} \tag{2}$$

ausgedrückt werden. Wann gilt hier das Curiegesetz? Bestimmen Sie für diesen Fall die Curiekonstante C.

c) Zeigen Sie, dass im Grenzfall $j \to \infty$ die Brillouin-Funktion aus Gleichung (2) sich auf die Langevin-Funktion reduziert, $B_j(x) \to L(x)$.

2. Mittlere Energie und Energieschwankung

Betrachten Sie ein klassisches einatomiges ideales Gas aus N Teilchen.

a) Was ergibt sich mit Hilfe des Gleichverteilungssatzes für die mittlere Energie $\langle E \rangle$?

b) Zeigen Sie, dass das Schwankungsquadrat der Energie $(\Delta E)^2$ sich aus der Summe der Schwankungsquadrate $(\Delta\varepsilon)^2$ der Energien der einzelnen Atome ergibt: $(\Delta E)^2 = N(\Delta\varepsilon)^2$.

c) Verwenden Sie diese Resultate und bestimmen Sie das Schwankungsquadrat der Energie $(\Delta E)^2$ und die relative Energieschwankung $\Delta E/\langle E \rangle$.

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Schwankung $(\Delta E)^2$ und der Wärmekapazität C_V?

3. Zweidimensionales Elektronengas

Betrachten Sie ein zweidimensionales Fermigas mit der Dispersion $\varepsilon(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$.

a) Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(\varepsilon)$.

b) Betrachten Sie zunächst den Fall von Temperatur $T = 0$. Wie lautet der Zusammenhang zwischen der Dichte n der Fermionen und dem Fermi-Wellenvektor k_F bzw. der Fermi-Energie ε_F.

c) Wie lautet der Zusammenhang zwischen Dichte n und chemischem Potential μ bei endlicher Temperatur $T > 0$?

d) Betrachten Sie ein System mit konstanter Teilchendichte n. Nutzen Sie die Relationen aus den Aufgabenteilen **b)** und **c)**, um das chemische Potential μ als Funktion der Temperatur T und der Fermi-Energie ε_F auszudrücken. Diskutieren Sie die Grenzfälle $kT \gg \varepsilon_F$ und $kT \ll \varepsilon_F$.