2. Wahrscheinlichkeitstheorie

2.1. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir betrachten eine (oder mehrere) stochastische Variable X.

X kann entweder diskrete Werte x_i (z.B. Punktzahl beim Würfeln) oder kontinuierliche Werte x (z.B. Koordinate eines Teilchens) annehmen.

Die statistischen Eigenschaften werden vollständig durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung (genauer: Wahrscheinlichkeitsdichte) ρ beschrieben. Eigenschaften:

	x diskret	x kontinuierlich
Positivität	$\rho_i = \rho(x_i) \geq 0$	$\rho(x) \geq 0$
Norm	$\sum_i \rho_i = 1$	$\int dx\, \rho(x) = 1$
Mittelwert (Erwartungswert)	$\langle X \rangle = \sum_i x_i \rho_i$	$\langle X \rangle = \int dx\, x\, \rho(x)$
n-tes Moment	$\langle X^n \rangle = \sum_i x_i^n \rho_i$	$\langle X^n \rangle = \int dx\, x^n \rho(x)$
Standardabweichung (Varianz $= \sigma^2$)	$\sigma = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$	

4V

Charakteristische Funktion $\qquad \phi(k) = \langle e^{ikX} \rangle = \int dx\, e^{ikx} \rho(x)$

↳ Momentenentwicklung $\qquad = \sum_n \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle$

Damit: $\qquad \rho(x) = \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{-ikx} \phi(k)$

Momente aus char. Fkt: $\qquad \langle X^n \rangle = \frac{1}{i^n} \left(\frac{d}{dk}\right)^n \phi(k) \Big|_{k=0}$

Kumulanten-Entwicklung:

$$\phi(k) = \exp\left(\sum_n \frac{(ik)^n}{n!} C_n(X)\right) \qquad \left[= \sum_n \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle\right]$$

Entwickeln ergibt

$$C_1(X) = \langle X \rangle, \qquad C_2(X) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \sigma^2,$$

$$C_3(X) = \langle X^3 \rangle - 3\langle X \rangle \langle X^2 \rangle + 2\langle X \rangle^3; \quad \ldots$$

I.a. konvergiert eine Kumulanten-Entwicklung schneller als eine Momentenentwicklung. z.B. Gauß-Verteilung

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \langle X \rangle)^2\right) \curvearrowright C_n(X) = 0 \quad \forall n \geq 3.$$

Mehrere stochastische Variablen:

Zwei kontinuierliche Variablen X und Y mit Werten x, y.

Gemeinsame Verteilungsfkt: $\rho_{X \times Y}(x,y) \geq 0$

Norm $\int dx\, dy\; \rho(x,y) = 1$

Momente $\langle X^n Y^m \rangle = \int dx\, dy\; x^n y^m \rho_{X\times Y}(x,y)$

Reduzierte Verteilungsfkt $\rho_X(x) = \int dy\; \rho_{X\times Y}(x,y)$

Kovarianz $\mathrm{cov}(X,Y) = \big\langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \big\rangle$

Korrelation $\mathrm{cor}(X,Y) = \mathrm{cov}(X,Y) / \sigma_X \sigma_Y$

Unabh. Variablen $\rho_{X\times Y}(x,y) = \rho_X(x)\, \rho_Y(y)$

$\curvearrowright$ ρ faktorisiert

Funktionen stochastischer Variablen:

$$Z = g(X,Y)$$

Verteilungsfkt $\quad \rho_Z(z) = \int dx\,dy \; \delta\big(z - g(x,y)\big)\, \rho_{XY}(x,y)$

Charakt. Fkt $\quad \phi_Z(k) = \int dx\,dy \; e^{ik\,g(x,y)}\, \rho_{XY}(x,y)$

Beispiel: $\quad X, Y$ unabh, $\quad \rho(x,y) = \rho_X(x)\,\rho_Y(y)$

$$Z = g(x,y) = x + y$$

$$\curvearrowright \quad \rho_Z(z) = \int dz' \; \rho_X(z-z')\,\rho_Y(z') \qquad \text{Faltung!}$$

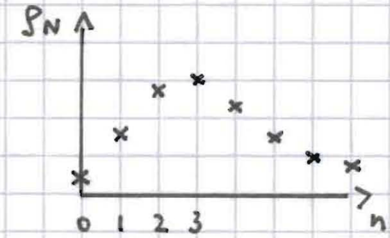
$$\phi_Z(k) = \phi_X(k)\,\phi_Y(k)$$

2.2. Wichtige Verteilungen

Wir betrachten ein System, wo jede Messung eines von zwei möglichen Ergebnissen (1 oder 2), mit Wahrscheinlichkeiten p und $q = 1-p$. (Beispiele: Münze Kopf oder Zahl $p = q = \frac{1}{2}$; Spin im Magnetfeld $\uparrow$ oder $\downarrow$, ... }; Radioaktiver Zerfall in Zeiteinheit Δt : $p \ll 1$)

N Messungen. Die Wahrscheinlichkeit, n mal Ereignis 1 zu messen, ist gegeben durch die

Binomial - Verteilung



$$\rho_N(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\, p^n q^{N-n}$$

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n\, \rho_N(n) = \sum_n p \frac{\partial}{\partial p} \rho_N(n)$$

$$= p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N \Big|_{p+q=1} = pN$$

$$\sigma_N = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} = \sqrt{Npq}$$

Für große N gilt $\sigma_N / \langle n \rangle \sim 1/\sqrt{N} \longrightarrow 0$ $\curvearrowright$ relative Breite verschwindet.

Gauß - Verteilung

N groß, pN, qN groß $\curvearrowright$ n kontinuierlich, $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Stirling)

$$\rho_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_N^2} (n - \langle n \rangle)^2 \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dn\, \rho_N(n) = 1$$

Poisson - Verteilung

Für $N \to \infty$, $p \to 0$, $a = Np$ fest (radioaktiver Zerfall, $N \sim \frac{1}{\Delta t}$)
reduziert sich Binomialverteilung auf Poisson-Verteilung

$$\rho_N(n) = \frac{a^n e^{-a}}{n!}$$

$$\langle n \rangle = a \quad , \quad \sigma_N = \sqrt{a} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \rho_N(n) = 1$$

Gauß-Verteilung mit mehreren Variablen x_i

$$\rho(x_1, \dots, x_N) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{ij} (x_i - a_i) A_{ij} (x_j - a_j)\right)$$

Zur Diskussion definieren wir $\tilde{x}_i = x_i - a_i$ und $S = \frac{1}{2} \sum_{ij} \tilde{x}_i A_{ij} \tilde{x}_j$.
Für den Mittelwert folgt:

$$\langle x_n \rangle = a_n + \langle \tilde{x}_n \rangle = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{N/2}} \int dx_1 \dots dx_N \; x_n \exp(-S) = a_n$$

Weiter kann man die zu $\{\tilde{x}_i\}$ konjugierten Variablen $\{\eta_i\}$
einführen,

$$\eta_i = \frac{\partial S}{\partial \tilde{x}_i} = \sum_j A_{ij} \tilde{x}_j \qquad \curvearrowright \quad S = \sum_{ij} \eta_i A^{-1}_{ij} \eta_j$$

$$\curvearrowright \quad \tilde{x}_i = \frac{\partial S}{\partial \eta_i} = \sum_j A^{-1}_{ij} \eta_j .$$

$$\curvearrowright \quad \langle \tilde{x}_i \eta_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\langle \tilde{x}_i \tilde{x}_j \rangle = A^{-1}_{ij}$$

$$\langle \eta_i \eta_j \rangle = A_{ij}$$