

## 6. Phasenübergänge

Literatur: N. Goldenfeld,  
Lectures on Phase Transitions  
and the Renormalization Group,  
Perseus

### 6.1. Molekularfeld-Näherung für das Heisenberg-Modell

Wir betrachten das ferromagnetische Heisenberg-Modell für Spins  $-1/2$ :

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j - \gamma \vec{B} \cdot \sum_i \vec{s}_i \quad (J > 0)$$

Für hohe Temperaturen,  $kT \gg J$ , verhält sich das System wie ein (fast) freies paramagnetisches Spinsystem, siehe Kap. 4.1.

Bei  $T=0$  ist der Grundzustand je nach Vorzeichen von  $B$  gegeben

durch  $|\psi\rangle_+ = |↑↑↑...⟩$  oder  $|\psi\rangle_- = |↓↓↓...⟩$ ,

für  $B=0$  ist der Grundzustand kontinuierlich entartet. Die zugehörige

Energie ist

$$E_0 = -J \sum_{\langle ij \rangle} s^2 = -J \frac{z}{2} N s^2 \quad (B=0)$$

wobei  $z$  die Zahl der nächsten Nachbarn eines Gitterplatzes ist.

(Quadratgitter  $z=4$ , einfach kubisches Gitter  $z=6$ ).

Damit erwarten wir einen Phasenübergang als Funktion von  $T$  zwischen einem geordneten und einem ungeordneten Zustand.

In der Molekularfeld-Näherung nehmen wir an, daß der Effekt der einen Spin umgebenden Spins durch ein lokales effektives (konfigurationsabhängiges) Feld ersetzt werden kann.

Zur Herleitung nehmen wir an, daß die Abweichung  $\vec{s}_i - \langle \vec{s}_i \rangle$  eines Spins vom Mittelwert klein ist.

$$\begin{aligned}\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j &= (\vec{s}_i - \langle \vec{s}_i \rangle + \langle \vec{s}_i \rangle) (\vec{s}_j - \langle \vec{s}_j \rangle + \langle \vec{s}_j \rangle) \\ &= \underbrace{(\vec{s}_i - \langle \vec{s}_i \rangle) (\vec{s}_j - \langle \vec{s}_j \rangle)}_{\text{klein} \rightarrow \%} + \vec{s}_i \langle \vec{s}_j \rangle + \langle \vec{s}_i \rangle \vec{s}_j - \langle \vec{s}_i \rangle \langle \vec{s}_j \rangle\end{aligned}$$

Für homogene Zustände gilt  $\langle \vec{s}_i \rangle = \langle \vec{s} \rangle$  und damit

$$\hat{H}_{\text{MF}} = -(\vec{h} + \vec{h}_{\text{MF}}) \sum_i \vec{s}_i + \frac{1}{2} N J \langle \vec{s} \rangle^2 \quad \vec{h} = \gamma \vec{B}$$

mit der Selbstkonsistenzbedingung (!)

$$\vec{h}_{\text{MF}} = \frac{1}{2} J \langle \vec{s} \rangle$$

$H_{\text{MF}}$  beschreibt nun unabhängige Spins in einem Feld  $\vec{h} + \vec{h}_{\text{MF}}$ , aus Kap 4.1. kennen wir die Eigenschaften dieses Systems.

Wählen wir die z-Achse im Spinraum  $\parallel \langle \vec{s} \rangle$ , dann folgt

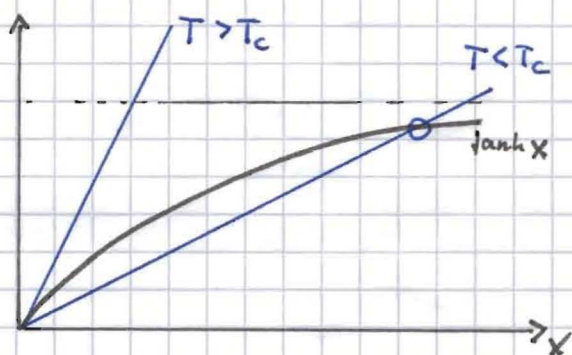
$$\langle s \rangle = \frac{1}{2} \tanh \left( \frac{h + h_{\text{MF}}}{2kT} \right) \quad \left( \text{Faktor 2, da hier } s \text{ statt } \sigma, \text{ mit } s_z = \pm \frac{1}{2} \right)$$

Wir diskutieren jetzt die Lösung der Selbstkonsistenzgleichung für  $\vec{B} = 0$  ( $h=0$ ).

Man erhält mit  $x = h_{\text{MF}} / 2kT$ :

$$\frac{4kT}{Jz} x = \tanh x$$

Diese transcendente Gleichung kann graphisch gelöst werden.



$T > T_c$ : Nur eine Lösung  $x=0 \leadsto \langle \vec{s} \rangle = 0$ .

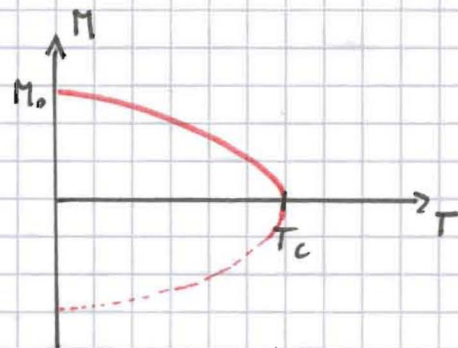
$T < T_c$ : Ex. eine Lösung mit  $x \neq 0$ . (und  $x \rightarrow -x$  sowie  $x=0$ )

$T_c$  ist gegeben durch  $k_B T_c = \frac{Jz}{4}$ .

Bei  $T = T_c$  findet ein Phasenübergang statt.

Die Magnetisierung ist

$$M = - \frac{\partial F}{\partial B} = \gamma N \langle S \rangle = \underbrace{\gamma N}_{M_0} \tanh x$$



Für  $T < T_c$  gibt es zwei stabile Lösungen mit  $M \neq 0$ ;

die Lösung mit  $M = 0$  ist instabil (siehe unten).

Für  $T < T_c$  ist die Magnetisierung also ohne äußeres Feld von Null verschieden: "spontane Magnetisierung" (hier: Ferromagnetismus.)

Dieser Zustand besitzt langreichweitige Ordnung (LRO), da gilt:

$$\langle \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rangle_{MF} = \langle S \rangle_{MF}^2 \neq 0 \quad \text{für } |i-j| \rightarrow \infty.$$

Für  $\vec{B} = 0$  ist die Richtung von  $\vec{M}$  beliebig. Der Zustand des Systems zeichnet bei  $\vec{M} \neq 0$  eine Richtung aus, damit hat dieser Zustand eine geringere Symmetrie als der Hamilton-Operator  $\hat{H}$  (bezgl. Drehungen im Spinraum,  $\hat{R}$ ), formal  $[\hat{H}, \hat{R}] = 0$  aber  $[\hat{S}, \hat{R}] \neq 0$ : "spontane Symmetriebrechung".

Die Magnetisierung  $\vec{M}$  wird als Ordnungsparameter bezeichnet.

Aus der spontanen Symmetriebrechung für  $T < T_c$  ergeben sich

wichtige Konsequenzen für die elementaren Anregungen im

System. Im vorliegenden Fall einer gebrochenen kontinuierlichen

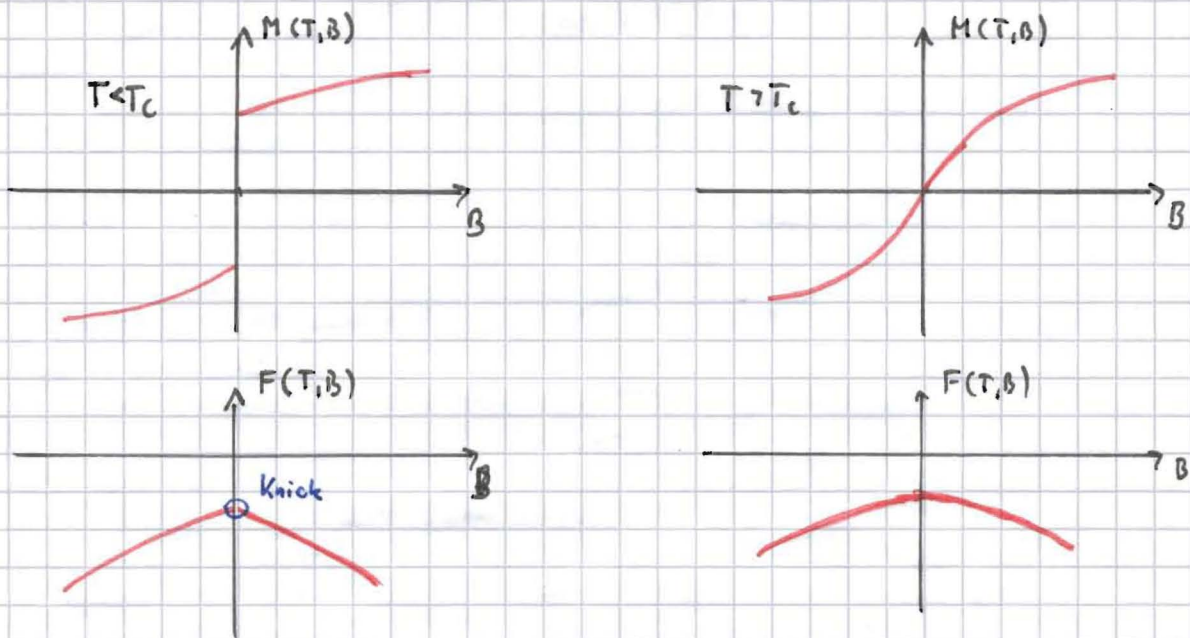
Symmetrie ( $SU(2)$ ) existieren Anregungen mit lückenlosem

Spektrum  $\omega(q \rightarrow 0) \rightarrow 0$  (Goldstone-Moden), dies

sind hier Spinwellen. Außerdem gibt es Defekte

im Ordnungsparameterfeld (Bloch-Wände).

Wir diskutieren noch kurz das Verhalten bei  $B \neq 0$ .  
 Dann ist immer  $\vec{M} \parallel \vec{B}$ . Aus  $\vec{M}$  erhalten wir  $F(T, B)$   
 durch Integration von  $\vec{M} = -\partial F / \partial B$ . Qualitativ:



### Phasenübergang bei $T = T_c$ : Singuläres Verhalten

Die Selbstkonsistenzgleichung kann umgeschrieben werden als:

$$\beta h = \ln \frac{1 + 2 \langle S \rangle}{1 - 2 \langle S \rangle} - \frac{T_c}{T} 4 \langle S \rangle$$

(mit Hilfe des Add. Theorems für  $\tanh$  sowie  $x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}$ ).

Entwickeln für kleine  $\langle S \rangle$  (nahe  $T_c$ !) liefert:

$$\beta h = 4 \langle S \rangle \left( 1 - \frac{T_c}{T} \right) + \frac{16}{3} \langle S \rangle^3 + \dots \quad (*)$$

(Dies erhält man auch direkt durch Entwickeln der Selbstkonsistenzgl.)

Wir definieren eine reduzierte Temperatur  $t = \frac{T - T_c}{T_c}$ ,

mit  $t \ll 1$  nahe des Phasenübergangs.

Wir erhalten damit Resultate für sog. kritische Exponenten:

a)  $B=0, T < T_c$ :  $\langle S \rangle^2 \propto -t$  (allg.  $\langle S \rangle \propto (-t)^\beta \rightarrow \beta = \frac{1}{2}$ )

b)  $t=0$ :  $\langle S \rangle^3 \propto B$  (allg.  $\langle S \rangle \propto B^{1/\delta} \rightarrow \delta = 3$ )

c) Suszeptibilität

$$\chi_T = \frac{1}{N} \frac{\partial M}{\partial B} \Big|_{B=0} \propto 2 \frac{\partial \langle S \rangle}{\partial h} = \begin{cases} \frac{1}{kT_c} \frac{1}{t} & T > T_c \\ \frac{1}{kT_c} \frac{1}{2|t|} & T < T_c \end{cases}$$

Allgemein:  $\chi_T = \begin{cases} t^{-\gamma} & T > T_c \\ |t|^{-\gamma'} & T < T_c \end{cases} \rightarrow \gamma = \gamma' = 1$  in Molekularfeld-näherung

d) Wärmekapazität (ohne Beweis)

$$C_H = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \frac{3}{2} N k (1 + \sigma(t)) & T < T_c \end{cases} \quad B=0$$

Bei vorliegendem Übergang ( $B=0, T=T_c$ ) sind  $\frac{\partial F}{\partial T}, \frac{\partial F}{\partial B}$  stetig, aber  $\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial B^2}$  unstetig, es handelt sich also um einen Phasenübergang zweiter Ordnung.

Generell Molekularfeld-Näherungen können für viele Phasenübergänge benutzt werden; sie vernachlässigen Fluktuationen des Ordnungsparameters. Es zeigt sich, daß solche Fluktuationen (für niedrige Raumdimension  $D$ ) in der Nähe des Phasenübergangs wichtig werden, deshalb werden i.a. die kritischen Exponenten durch Molekularfeldtheorie nicht korrekt wiedergegeben.

## 6.2. Landau - Theorie der Phasenübergänge

Lit. N. Goldenfeld,  
Lectures on Phase  
Transition and the  
Renormalization Group

Thermodynamische Größen bzw. ihre Ableitungen sind singular am  
kritischen Punkt, z.B.  $F(T, \vec{H})$  am Punkt  $T=T_c, H=0$  beim Ferromagneten.

Landau: Definiere ein verallgemeinertes Potential, welches zusätzlich  
den Ordnungsparameter (z.B.  $\vec{m} = \vec{M}/V$ ) als Variable enthält  
und nicht singular wird (!).

(Einheitenvoll)

Im folgenden explizit für Ferromagnet. (zur Vereinfachung  $\vec{m} = \vec{M}/V$  dim.-los)

Aus dem Potential  $f(T, \vec{H}) = F/V$  mit  $df = -s dT - \vec{m} d\vec{H}$

wird so  $\varphi(T, \vec{H}, \vec{m})$ . **Achtung**:  $\varphi$  ist kein tot. Potential!

Der tot. Gleichgewichtszustand ist zu ermitteln aus:

$$\frac{\partial \varphi(T, \vec{H}, \vec{m})}{\partial \vec{m}} = 0 \quad ! \quad (\vec{m} \text{ homogen})$$

Daraus erhält man  $\vec{m}_{\text{ggw}}(T, \vec{H})$  und das Potential  $f(T, \vec{H}) = \varphi(T, \vec{H}, \vec{m}_{\text{ggw}}(T, \vec{H}))$

(Bem.: Man kann zeigen, daß dieses Vorgehen formal einer Sattelpunktnäherung  
in einer Funktionalintegraldarstellung der Zustandssumme entspricht.)

I.a. ist  $\varphi$  unbekannt; in der Nähe des Phasenübergangs ( $\vec{m}$  klein!)  
kann es jedoch nach  $\vec{m}$  entwickelt werden (da nicht singular!):

$$\varphi(T, \vec{H}, \vec{m}) = \varphi_0(T) + \bar{f} \left( \frac{a(T)}{2} |\vec{m}|^2 + \frac{b(T)}{4} |\vec{m}|^4 - \vec{m} \cdot \vec{h} \right)$$

Dabei hat  $\bar{f}$  die Dimension einer Energie (pro Volumen), und  $\vec{h} = \vec{H}/\bar{f}$ .

Wegen Isotropie, d.h. Rotations-symmetrie im Spiraum, können für  $\vec{H}=0$   
nur gerade Potenzen von  $\vec{m}$  auftreten. ( $\varphi$  ist Skalar,  $\vec{m}$  ist Vektor!)

(Anders beim Flüssig-Gas-Übergang, wo  $\psi = V/N$  der Ordnungsparameter ist.)

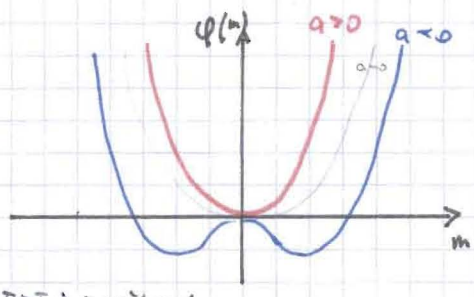
$\varphi_0$  kann üblicherweise ignoriert werden (nur schwach T-abhängig).

U.h. muß ein  $\varphi^6$ -Term hinzugefügt werden!

Diskussion für  $\vec{h} = 0$

Stabilität erfordert  $b > 0$ .

$\frac{\partial \varphi}{\partial m} = 0$  liefert  $m = \begin{cases} 0 & a > 0 \\ \pm \sqrt{-a/b} & a < 0 \end{cases}$



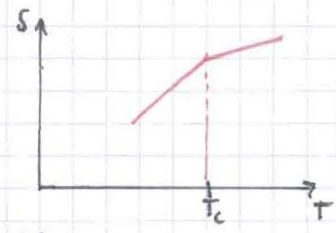
$a > 0$  liefert offenbar einen Paramagneten ( $T > T_c$ ), während  $a < 0$  einen Ferromagneten ( $T < T_c$ ) beschreibt.

Folglich  $a(T_c) = 0$ , und wir können entwickeln:  $a(T) = \alpha \frac{T - T_c}{T_c}$

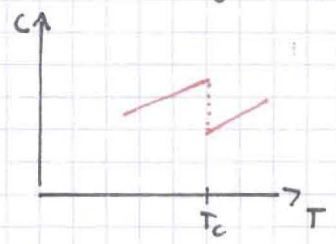
$\rightarrow m = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \pm \sqrt{\alpha/b |t|} & T < T_c \end{cases}$  ↷ PÜ 2. Ordnung (kontinuierlich)

Damit

$f(T) = \begin{cases} \varphi_0(T) & T > T_c \\ \varphi_0(T) - \frac{\alpha^2}{4b} \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^2 & T < T_c \end{cases}$



$s/V = -\frac{\partial f}{\partial T} = \begin{cases} s_0(T) & T > T_c \\ s_0(T) - \frac{\alpha^2}{2b} \frac{T_c - T}{T_c^2} & T < T_c \end{cases}$



$C/V = \frac{\partial S/V}{\partial T} = \begin{cases} c_0 & T > T_c \\ c_0 + \frac{\alpha^2}{2b} \frac{1}{T_c} & T < T_c \end{cases}$

Diskussion für  $\vec{h} \neq 0$

$\vec{m} \parallel \vec{h}$  wegen  $\varphi \rightarrow \min$

$\Delta \varphi = \frac{\alpha}{2} t m^2 + \frac{b}{4} m^4 - m h$

$\frac{\partial \varphi}{\partial m} = 0$  liefert  $\alpha \frac{t}{2} m + b m^3 = h$  \*

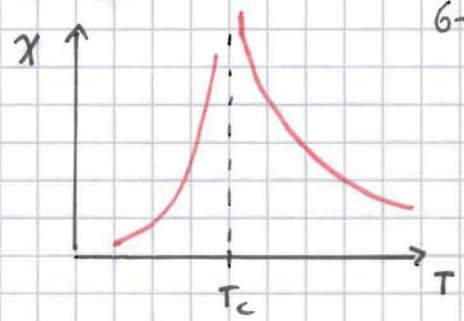
$m(h) = m_{\text{spontan}} + \chi(T) h$ ,  $\chi := \frac{\partial m}{\partial h} \Big|_{h=0}$  Suszeptibilität

$\frac{\partial}{\partial h} \Big|_{h=0} (*)$ :  $\alpha \frac{t}{2} \chi + 3 b m_{\text{spontan}}^2 \chi = 1$

Damit:

$$\chi(T) = \begin{cases} \frac{T_c}{\alpha(T-T_c)} & T > T_c \\ \frac{T_c}{2\alpha(T_c-T)} & T < T_c \end{cases}$$

Curie-Weiss



Exakt am Phasenübergangspunkt  $T = T_c$ :

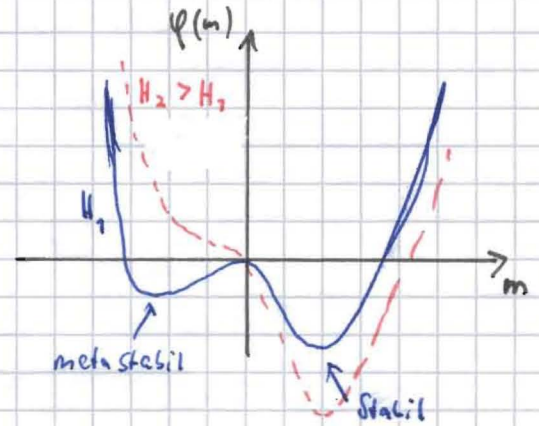
$$m = \left(\frac{h}{k_B}\right)^{1/3}$$

Das Landau-Funktional  $\varphi(m, H)$  hat zwei Minima

für  $T < T_c$ ! Bei Variation von  $H$  durch Null tauschen beide Minima ihre Rolle

≙ Phasenübergang erster Ordnung

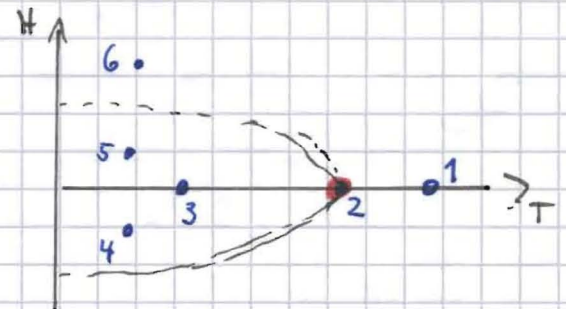
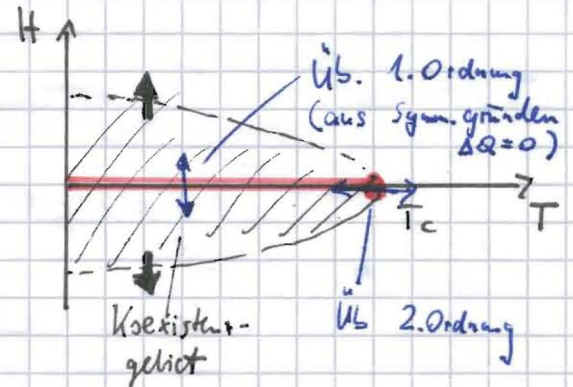
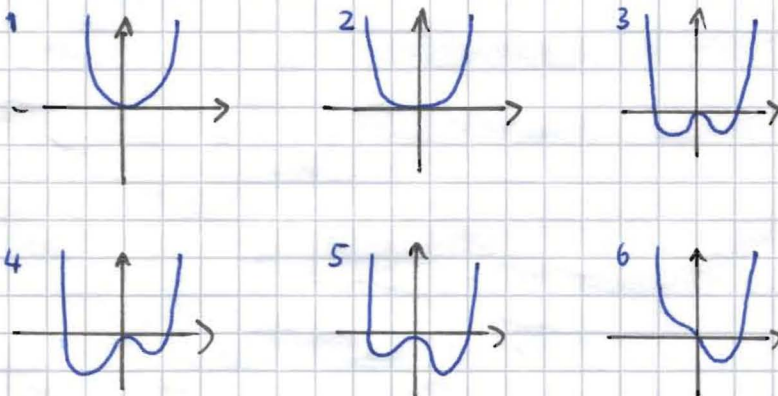
(Sprung der Magnetisierung von  $m_{spontan}$  nach  $-m_{spontan}$ )



Für noch größere Felder verschwindet metastabiles Minimum.

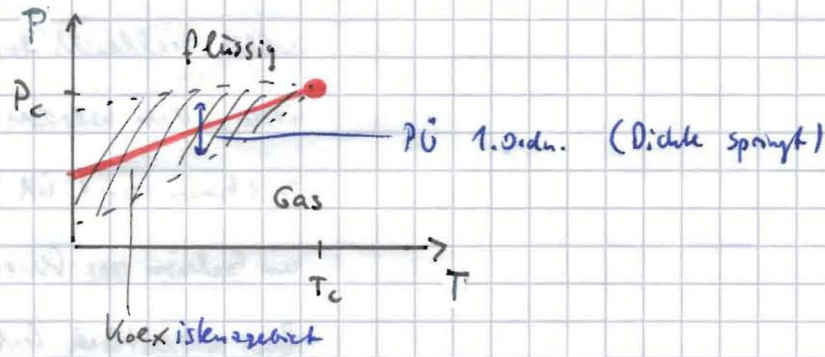
Das Phasendiagramm ist damit:

$\varphi(m)$  hat jeweils folgende Form:



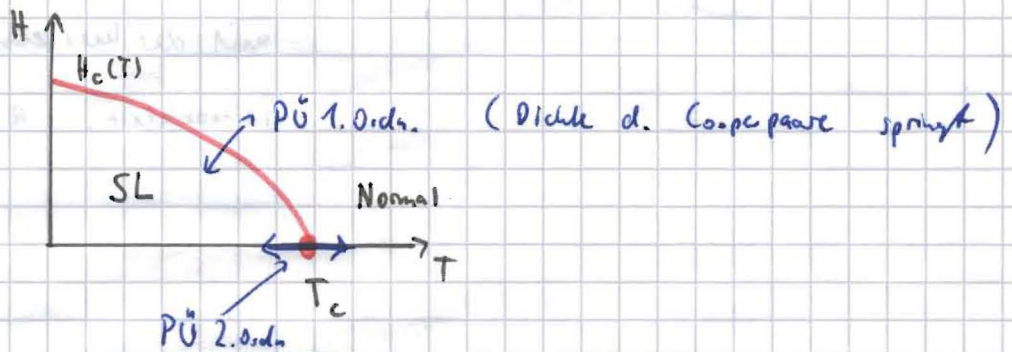


Analoges Verhalten für van-der-Waals-Gas : (Ordnungsparameter ist Dichte)



Supraleiter :

(OP ist Kondensat dichte)



### 6.3. Räumliche Korrelationen

Aufgrund von Fluktuationen wird der Ordnungsparameter ortsabhängig von seinem Mittelwert abweichen. Innerhalb der Landau-Theorie können solche räumlichen Variationen  $\vec{m}(\vec{r})$  erlaubt werden. Da Variationen Energie kosten, und zwar weniger Energie für langsame Variationen, <sup>Zeit kommt nirgends vor, GGTD</sup> erhält man <sup>P.S.</sup> in einer Gradientenentwicklung einen zusätzlichen Beitrag  $\propto |\nabla \vec{m}|^2$ : <sup>vielleicht besser: "ausgedehnte Fluktuationen"</sup>

$$\varphi(T, \vec{H}, \vec{m}(\vec{r})) = \varphi_0 + \bar{f} \left( \frac{a(T)}{2} \vec{m}^2 + \frac{b(T)}{4} \vec{m}^4 + \int_0^2 \left( \nabla \vec{m}(\vec{r}) \right)^2 - \vec{h} \cdot \vec{m} \right)$$

(Landau-Ginzburg-Theorie)

$\xi_0$  ist dabei eine natürliche Längenskala, siehe unten.

Die freie Energie folgt durch Integration:

$$F = \int d^D r \varphi(T, \vec{H}, \vec{m}_{\text{ggw}}(\vec{r}))$$

Wir betrachten jetzt die Änderung der freien Energie durch eine Abweichung  $\delta m(\vec{r})$  vom Gleichgewichtswert  $\vec{m}_0$ . Entwickeln:

$$\delta F = \frac{1}{2} \int d^D r \bar{f} \delta m(\vec{r}) \left( \underbrace{a(T) + 3b(T)m_0^2}_{=: A} - \int_0^2 \nabla^2 \right) \delta m(\vec{r})$$

↑  
1-partiall. Integral

Fourierzerlegung von  $\delta m$ :

$$\delta F = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \bar{f} \delta m(\vec{k}) \left( A + \int_0^2 k^2 \right) \delta m(-\vec{k})$$

Die Korrelationsfunktion  $\langle \delta m \delta m \rangle$  berechnet sich aus:

$$\langle \delta m(\vec{k}) \delta m(\vec{k}') \rangle = \frac{1}{Z'} \prod_{\vec{k}} \int d m(\vec{k}) \delta m(\vec{k}) \delta m(\vec{k}') e^{-\beta \delta F},$$

wobei sich  $e^{-\beta V \varphi_0}$  in Zähler und Nenner kürzt.

(Details der Rechnung siehe Goldenfeld)

Das Gaußsche Integral läßt sich ausführen:

$$\langle \delta m(\mathbf{k}) \delta m(\mathbf{k}') \rangle = \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} \frac{kT}{\int (A + \int_0^2 k^2)}$$

Oststein-Ze尼克-  
Korrelationsfunktion

Fourier-Transform in den Ortsraum:

$$\langle \delta m(\vec{r}) \delta m(\vec{r}') \rangle = \langle m(\vec{r}) m(\vec{r}') \rangle - m_0^2 =: G(\vec{r} - \vec{r}')$$

mit:

$$G(r) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \langle \delta m(\mathbf{k}) \delta m(-\mathbf{k}) \rangle$$

Für  $D=3$  exakt:

$$G(r) = \frac{kT}{c} \frac{e^{-r/\xi(T)}}{r}$$

Allgemein für große  $r$ :

$$G(r) \propto \frac{e^{-r/\xi(T)}}{r^{(D-1)/2}} \xi^{\frac{3-D}{2}}$$

Dabei ist  $\xi(T)$  die Korrelationslänge:

$$\xi(T) = \xi_0 / \sqrt{A} = \begin{cases} \xi_0 / \sqrt{A} & T > T_c \\ \xi_0 / \sqrt{2\alpha|t|} & T < T_c \end{cases}$$

Räumliche Fluktuationen des Ordnungsparameters sind also korreliert auf einer Längenskala  $\xi(T)$ , die am kritischen Punkt divergiert,

$$\xi(T) \propto |t|^{-\nu}, \quad \nu = \frac{1}{2}$$

Am kritischen Punkt  $\xi(T) = \infty$ , und  $G(r) \propto r^{2-D}$  in Landau-Theorie.

Nahе des kritischen Punktes variiert  $\partial t$  also langsam, dies <sup>mit dem  $\partial t$  r.s.</sup> ~~reicht~~ <sup>ist</sup> ~~bedeutend~~ <sup>relevant</sup> für die Gradientenentwicklung in der Ginzburg-Landau-Theorie.

Die Divergenz der Korrelationslänge am krit. Punkt bedeutet, daß sich die relevante Physik auf großen Längenskalen abspielt, d.h. mikroskopische Details werden unwichtig.

⇒ Universalität der kritischen Phänomene

## 6.4. Kritische Exponenten und Skalenverhalten

Am kritischen Punkt divergiert Korrelationslänge  $\xi$ , d.h. es gibt Fluktuationen auf allen Längenskalen.  $\hat{=}$  Das System ist skalen invariant.

Dadurch hängen alle Größen über Potenzgesetze von den externen Parametern ab. (Nur Potenzgesetze  $f \sim x^d$  sind skalen invariant!)

Diese Potenzgesetze definieren sogenannte kritische Exponenten (Die berühmte Landau - Theorie liefert solche Potenzgesetze, aber die Werte der Exponenten sind in niedrigen Dimensionen inkorrekt, siehe unten.)

### Übersicht über gebräuchliche krit. Exponenten (für Magnet)

	Größe	Verhalten	Landau
Spez. Wärme	$C_H = T (\partial^2 S / \partial T^2)_H$	$C_H \propto  t ^{-\alpha} \quad  t  \rightarrow 0, H=0$	$\alpha = 0$
Ordn. parameter	$m(t)$	$m \propto (-t)^\beta \quad t \rightarrow 0, H=0$	$\beta = 1/2$
Suszeptibilität	$\chi = \partial m / \partial H$	$\chi \propto  t ^{-\gamma} \quad  t  \rightarrow 0, H=0$	$\gamma = 1$
Krit. Isotherme	$M(H) \text{ bzw. } H(m)$	$H \propto  m ^\delta \text{ sign}(m) \quad H \rightarrow 0, t=0$	$\delta = 3$
Korr. Länge	$\xi(t)$	$\xi \propto  t ^{-\nu} \quad  t  \rightarrow 0, H=0$	$\nu = 1/2$
Korr. funktion	$G(r)$	$G(r) \propto  r ^{-D+2-\eta} \quad  t  \rightarrow 0, H=0$	$\eta = 0$

Die Universalität hat zur Folge, daß ganze Klassen von Systemen gleiche krit. Exponenten aufweisen  $\hat{=}$  Universalitätsklassen.

Die Exponenten hängen nur von der Dimensionalität des Systems und der Symmetrie des Ordnungsparameters ab, nicht von mikroskopischen Details.

Beispiele:

- a) Ising - Modell : Ordnungsparameter hat  $n=1$  reelle Komponente  
 b) Heisenberg - Modell :  $n=3$  reelle Komponenten  
 c) Supraleiter : Ordnungsparameter  $\psi$  ist komplexer Skalar  
 (Wellenfunktion des Kondensats) ; er koppelt mit Ladung  $2e$   
 an elektromag. Feld:

$$\varphi(\psi) = \varphi_0 + \int \left( \frac{a}{2} |\psi|^2 + \frac{b}{4} |\psi|^4 + \frac{\epsilon_0^2}{2t^2} \left| \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi \right|^2 \right) + \frac{H^2}{8\pi}$$

(Ginzburg-Landau-Theorie  
für Supraleiter)

Vektorpot  
mag.  
Energiedichte

Da  $\xi$  die einzige relevante Länge in der Nähe des kritischen Punktes ist, kann man das Verhalten des Systems unter

Skalentransformationen studieren:

Maßstabsänderung	Länge	$x \rightarrow bx$
Gleichzeitig Parameter reskalieren	$t$	$t \rightarrow b^{d_t} t$
	$H$	$H \rightarrow b^{d_H} H$

Bei einer solchen Transformation sollte Physik invariant sein (für geeignete  $d_t, d_H$ ), da die Änderung von  $\xi(T)$  bei Parameteränderung einer Maßstabsänderung entspricht.

Skalenhypothese  $\varphi(t, H) = b^{-D} \varphi(b^{d_t} t, b^{d_H} H)$

Wegen  $\xi \sim |t|^{-\nu}$  gilt  $d_t = 1/\nu$ , d.h.

$$\varphi(t) = b^{-D} \varphi(b^{1/\nu} t) \quad (H=0)$$

denn  $t \rightarrow b^{1/\nu} t$  bedeutet  $\xi \rightarrow \frac{1}{b} \xi$ , was durch  $x \rightarrow bx$  kompensiert wird.

Ebenfalls für  $H=0$  und speziell  $b = t^{-\nu/d_t} = t^\nu$  folgt

$$\varphi(t) = t^{D\nu} \varphi(1)$$

Aus der Skalenhypothese können die kritischen Exponenten abgeleitet werden. Man erhält die sogenannten Skalenrelationen:

$$2 - \alpha = 2\beta + \gamma$$

$$2 - \alpha = \beta(\delta + 1)$$

Die Skalenhypothese kann im Rahmen der Renormierungsgruppentheorie sauber abgeleitet werden.

(siehe z.B. Goldenfeld)

## 6.5. Fluktuationen und Ginzburg-Kriterium

Wie erwähnt ist Landau-Theorie in der Nähe des Phasenübergangs (d.h. des krit. Punktes) u. U. inkorrekt. Warum?

Landau-Theorie als Molekularfeld-Theorie vernachlässigt Fluktuationen des Ordnungsparameters. Die Qualität einer solchen Näherung hängt davon ab, wie groß Fluktuationen im Vergleich zum Mittelwert sind. Wir betrachten Korrelationsfunktionen auf charakteristischer Längenskala  $\xi(T)$ :

$$\frac{\langle \delta m(\vec{r} = \xi(T)) \delta m(\vec{r} = 0) \rangle}{m_0^2} \propto \frac{\xi(T)^{2-D}}{|\xi(T)|} \propto |\xi(T)|^{(D-4)/2}$$

$\langle \delta m(\vec{r}) \delta m(\vec{r}') \rangle \propto \xi^{2-D}$  (Kap. 6.3)  
 $\downarrow$   
 $\propto$   
 $\uparrow$   
 $m \propto (-t)^{1/2}$

$\xi \sim |t|^{-1/2}$   
 $\downarrow$   
 $\propto |t|^{(D-4)/2}$

$\xrightarrow{|t| \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & D > 4 \\ \infty & D < 4 \end{cases} !$

Das heißt, die relativen Fluktuationen des OP verschwinden in der Nähe des Phasenübergangs für  $D > 4$  (!) - dann ist Landau-Theorie asymptotisch korrekt und die Exponenten in Kap. 6.4 exakt.

Dagegen sind für  $D < 4$  Fluktuationen groß, und eine Molekularfeldnäherung ist nicht ausreichend (sie ist für  $|t| \rightarrow 0$  qualitativ falsch!).

Allerdings kann der numerische Vorfaktor der Fluktuationen klein sein. Einer der „günstigen“ Fälle ist ein dreidimensionales Supraleiter, hier erhält man:

$$\frac{\langle \delta \psi(\vec{r}) \delta \psi \rangle}{|\psi_0|^2} \propto \left( \frac{k T_c}{E_F} \right)^2 |\xi|^{-1/2}$$

Damit werden Fluktuationen erst wichtig, wenn  $|\xi| < \left( \frac{k T_c}{E_F} \right)^4 \sim 10^{-10}$ . (!)

## 6.6. Renormierungsgruppe

L. Kadanoff 1967

K. Wilson 1971

F. Wegner 1971

### Idee der RG

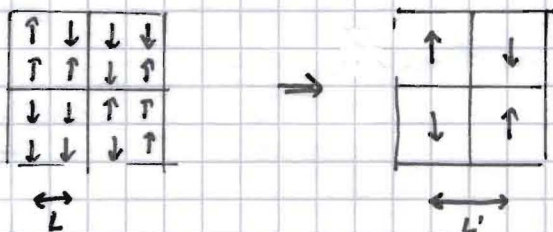
Kritischer Punkt ist skaleninvariant; in der Nähe ist Physik auf großen Längenskalen relevant  $\rightarrow$  Physik auf kleinen Skalen eliminieren.

Ausgehend von einem mikroskopischen oder effektiven Modell, zB.

$$F = \int d^D x \bar{f} \left( a/2 \phi^2 + b/4 \phi^4 + f_0^2 (\nabla \phi)^2 \right),$$

führt man sukzessive Renormierungsgruppen-Transformationen durch, bei denen man Freiheitsgrade und Wechselwirkungsprozesse auf kleinen Skalen eliminiert.

### Bsp: Block-Spin-Skalierung



Dabei werden die Wechselwirkungen modifiziert, sie hängen von der aktuellen Längenskala  $L$  ab.

(Ginzburg-Landau:  $a(L)$ ,  $b(L)$ ,  $f_0(L)$ )

Ein kritischer Punkt ist ein Fixpunkt der RG, da System dort skaleninvariant. (Es gibt noch weitere (triviale) Fixpunkte der RG; wo Parameter  $\rightarrow 0$  oder  $\rightarrow \infty$  fließen  $\hat{=}$  stabile Phasen)

Man bestimmt Fixpunkte mit  $\frac{\partial a}{\partial L} = 0$  usw.; Entwicklung um Fixpunkt liefert dann kritische Exponenten.



## 6.7. Quantenphasenübergänge

Bisher: Phasenübergänge bei Variation von  $T$ ,  
getrieben durch thermische Fluktuationen

In Quantensystemen kann Ordnung auch bei  $T=0$  durch Quanten-  
fluktuationen zerstört werden! Kontrollparameter ist dann z.B.

Druck, Magnetfeld, chemische Zusammensetzung.  $\rightarrow$  **Quantenphasenübergänge**

Beispiel: Ising-Modell im transversalen Feld (z.B.  $\text{LiHoF}_4$ )

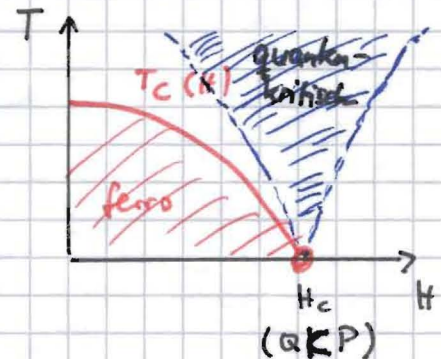
$$\hat{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{S}_i^z \hat{S}_j^z + H \sum_i \hat{S}_i^x$$

Magnetfeld  $H$  induziert Tunneln zwischen  $\uparrow$  und  $\downarrow$  ( $\hat{S}_i^x = (\hat{S}_i^+ + \hat{S}_i^-)/2$ ).

Ein kontinuierlicher Quantenphasenübergang  
(hier bei  $H = H_c$ ,  $T=0$ ) führt zu  
hochinteressanten Eigenschaften bei endlichen

Temperaturen (!)  $\hat{=}$  **quantenkritisches**

**Verhalten**, da Grundzustand am  
QKP ungewöhnliche Eigenschaften hat  
(keine konventionellen Teilchen- oder wellenartigen  
Anregungen).



Quantenphasenübergänge spielen eine große Rolle in der aktuellen  
Festkörperphysik; sie sind für viele interessante Systeme  
(Hochtemperatur-Supraleiter; Quanten-Hall-Systeme; ...)  
von entscheidender Bedeutung.