Theoretische Physik (Master)

Prof. Dr. M. Vojta

TU Dresden

WS 2020/21

Einleitung und Motivation

Bisher: Klassische Mechanik, Elektrodynamik, Quantentheorie I + II, Statistische Physik } sind Grundlage dieser Vorlesung (zweite Quantisierung!)

Hier: Theoretische Physik als Ganzes,

Betonung übergreifender Konzepte.

(z.B. Symmetrien und Symmetriebrechung,

Quantenmechanik und klassischer Grenzfall,

Hydrodynamik und Universalität,

Higgs-Mechanismus in Festkörper- und Teilchenphysik)

Dazu: Wiederholungen + neuer Stoff (bzw. neue Formulierung bekannten Stoffs)

Beispiele aus vielen Gebieten, mit Betonung auf Vielteilchensysteme und kondensierte Materie

Modul enthält

3 SWS Vorl, 1 SWS Üb } WS

1 SWS Tutorium, 3 SWS Selbststudium } SS

Mündliche Prfg 45 min über Grundlagen (3/4) + weiterführenden Stoff (1/4)

Inhalt

Literatur

- R. Shankar, Principles of Quantum Mechanics
- F. Schwabl, Statistical Mechanics
- J. W. Negele / H. Orland, Quantum Many-Particle Systems
- P. M. Chaikin / T. C. Lubensky, Principles of Condensed Matter Physics
- D. Forster, Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetries, and Correlation Functions

1. Grundbegriffe

a) Klassische Mechanik (von Massenpunkten)

Zustand eines Systems $\hat{=}$ Phasenraumpunkt (q,p)

N Teilchen in d Dimensionen: dN Orte, dN Impulse

Dynamik gegeben durch Hamilton-Fkt $H(q,p)$ und

Hamiltonsche Gleichungen $\dot{p}_j = -\partial H/\partial q_j, \quad \dot{q}_j = +\partial H/\partial p_j$

Formulierung mit Poisson-Klammern (verallgemeinerbar!):

$$\{f,g\} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} \quad \curvearrowright \quad \{p,q\} = 1$$

$$\dot{q}_j = \{H, q_j\}, \qquad \dot{p}_j = \{H, p_j\}$$

Allg. Observable

$$\frac{d}{dt} A(q,p,t) = \{H, A\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Alternativ: Lagrange-Fkt $L(q,\dot{q})$ mit

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \quad \text{und} \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

kanonisch konj.

$\curvearrowright$ Dynamik aus Euler-Lagrange-Gl. (siehe unten)

b) Quantenmechanik

Zustand eines Systems $\hat{=}$ Vektor $|\psi\rangle$ in Hilbert-Raum ($\hat{=}$ reiner Zustand)

definiert Freiheitsgrade des Systems

Observable $\hat{O} = \hat{O}^+$, $\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$.

Dynamik gegeben durch Hamilton-Op $\hat{H}$ und

Schrödinger-Gleichung $i\hbar\, \partial_t |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$ (unitäre Zeitevolution)

Gemischte Zustände beschrieben durch Dichteoperator $\hat{\rho}$ ($Sp\, \hat{\rho} = 1$), $\hat{\rho} = \hat{\rho}^+$

mit $\langle \hat{O} \rangle = Sp(\hat{\rho}\,\hat{O})$

und $i\hbar\, \partial_t \hat{\rho}(t) = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)]$

Nachtrag: Klein-Gordon-Gl und „unitäre Zeitevolution"

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

Umschreiben in φ und χ

$$\left.\begin{aligned} \psi &=: \varphi + \chi \\ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &=: mc^2 (\varphi - \chi) \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{2 DGL 1. Ordnung}$$

Kompakt

$$\underline{\Psi} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \, \partial_t \underline{\Psi} = \hat{H}_f \, \underline{\Psi} \qquad (\hat{=} \text{ K-G-Gleichung})$$

Freie Teilchen

$$\hat{H}_f = (\tau_3 + i\tau_2) \frac{p^2}{2m} + \tau_3 \, mc^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{p^2}{2m} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} mc^2$$

Lösen der „Spinor"-KG-Gl. liefert Lsg mit positiver und negativer Energie gemeinsam!

c) Übergang klassische Mechanik $\longrightarrow$ Quantenmechanik

Erfordert „Quantisierung" (nicht eindeutig!)

Üblich: Kanonische Quantisierung $q \to \hat{q}$, $p \to \hat{p}$ mit $[\hat{p}_j, \hat{q}_j] = -i\hbar$
(Poisson-Klammer durch Kommutator ersetzt)
kanonisch konj.

d) Übergang Quantenmechanik $\longrightarrow$ klassische Mechanik

i.a. Eindeutig, formal $\hbar \to 0$.

e) Wirkung und Euler-Lagrange-Gl.

$S = \int dt\, L \longrightarrow \min$ Universelles Prinzip der kleinsten Wirkung

Variation für Diskrete Freiheitsgrade $L(q, \dot{q}, t)$ ergibt

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Variation für kont. Freiheitsgrade (Felder) mit

Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu)$ und $L = \int d^d r\, \mathcal{L}$ ergibt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$$

Diese Euler-Lagrange-Gl. beschreiben die Systemdynamik.

f) Gibbs-Ensemble

Vielteilchensysteme im Gleichgewicht: Mittelung über Ensembles gleichartiger Systeme

Dichtematrix $\hat{\rho}$ folgt aus Maximierung der Entropie

$$S = -k \, \mathrm{Sp} \, \hat{\rho} \ln \hat{\rho}$$

unter Nebenbedingungen (zB. $E = \text{const}$ oder $\langle E \rangle = \text{const}$, $N = \text{const}$ oder $\langle N \rangle = \text{const}$ etc.)

Kanonisches Ensemble $\hat{\rho} = \frac{1}{Z_k} e^{-\beta \hat{H}}$, $\beta = 1/k_B T$, $Z_k = \mathrm{Sp}\, e^{-\beta \hat{H}}$

$$F = -kT \ln Z_k$$

g) Symmetrien und Symmetriebrechung

Noether-Theorem: zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße.

QM: Symmetrie-Operation $\hat{S}$

Kontinuierliche Symmetrie mit Generator $\hat{g} = \hat{g}^{+}$: $\hat{S} = e^{i\alpha \hat{g}}$ — zB. Translation — Impuls

$[\hat{H}, \hat{S}] = 0 \iff [\hat{H}, \hat{g}] = 0$

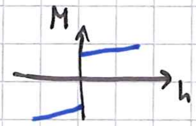
Spontane Symmetriebrechung: $[\hat{H}, \hat{S}] = 0$, aber $[\hat{\rho}, \hat{S}] \neq 0$.

Symmetriebrechung im Gibbs-Ensemble ($[\hat{H}, \hat{S}] = 0 \iff [e^{-\beta \hat{H}}, \hat{S}] = 0$):

Symmetriebrechendes Feld $\hat{H} \longrightarrow \hat{H} - h\hat{\phi}$, $\hat{\phi}$: Ordnungsparameter $[\hat{\phi}, \hat{S}] \neq 0$

Symmetriebrechung $\hat{=}$ Limes $h \to 0$ singulär

$$\lim_{h \to 0} \hat{\rho}(h) \neq \hat{\rho}(h=0)$$



Ferromagnet

Symmetriebrechung erfordert thermodyn. Limes, da endliche Systeme keinen Phasenübergang bei $T > 0$ zeigen können ($e^{-\beta \hat{H}}$ = Produkt endlich vieler Exp. Fkt)

↷ Symmetriebrechung $\hat{=} \lim_{h \to 0} \lim_{N \to \infty} \ldots \neq \lim_{N \to \infty} \lim_{h \to 0} \ldots$