

2. Pfadintegrale und Aharonov-Bohm-Effekt

Ziel: alternative Formulierung der Quantenmechanik, die dem klassischen Bild von Trajektorien (Pfadern) nahe kommt
 Pfadintegrale sind ein zentrales Werkzeug für Vielteilchensysteme.

2.1. Erinnerung Gaußintegrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\text{denn: } \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} \right)^2 = \int dx dy e^{-\alpha(x^2+y^2)} = 2\pi \int_0^{\infty} dr r e^{-\alpha r^2} = \pi \int_0^{\infty} ds e^{-\alpha s} = \frac{\pi}{\alpha})$$

\uparrow $\text{Re } \alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2 + bx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{b^2/2a}$$

\uparrow quadratische Ergänzung

Matrizen und N -dim. Integrale: \underline{A} $N \times N$ reell symmetrisch, $\underline{A} = \underline{D}^T \underline{D}$, \underline{D} diag

$$\int d\underline{x} \exp\left(-\frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{A} \underline{x}\right) \stackrel{\underline{x}' = \underline{D} \underline{x}}{=} \int d\underline{x}' \exp\left(-\frac{1}{2} \underline{x}'^T \underline{D} \underline{x}'\right) = (2\pi)^{N/2} (\det A)^{-1/2}$$

$$\int d\underline{x} \exp\left(-\frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{A} \underline{x} + \underline{j}^T \underline{x}\right) = (2\pi)^{N/2} (\det A)^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \underline{j}^T \underline{A}^{-1} \underline{j}\right)$$

Erwartungswerte mit Verteilungsfkt $\exp\left(-\frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{A} \underline{x}\right)$:

$$\langle f(\underline{x}) \rangle = \frac{\int d\underline{x} f(\underline{x}) \exp\left(-\frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{A} \underline{x}\right)}{\int d\underline{x} \exp\left(-\frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{A} \underline{x}\right)}$$

$$\langle x_i \rangle = 0$$

$$\langle x_i x_k \rangle = \frac{\int d\underline{x} \frac{\partial}{\partial j_i} \frac{\partial}{\partial j_k} \exp\left(-\frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{A} \underline{x} + \underline{j}^T \underline{x}\right) \Big|_{\underline{j}=0}}{\int d\underline{x} \exp\left(-\frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{A} \underline{x}\right)} = \left(\underline{A}^{-1}\right)_{ik}$$

2.2. Übergangsamplitude

Idee Pfadintegral : $\langle f|i \rangle = \sum_c \langle f|c \rangle \langle c|i \rangle = \sum_{cc'} \langle f|c \rangle \langle c|c' \rangle \langle c'|i \rangle$
 $= \sum_{\text{Pfade}} A(i \rightarrow \dots \rightarrow f)$



Einzelnes Teilchen : Feynman - Pfadintegral

Vielteilchensysteme : Pfadintegral mit kohärenten Zuständen (hier nicht)

Erinnerung Zeitentwicklung :

$$i \hbar \partial_t |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$$

Zeitentwicklungoperator \hat{U} :

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t') |\psi(t')\rangle$$

$$i \hbar \partial_t \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) \quad \text{mit} \quad \hat{U}(t_0, t_0) = 1$$

Lsg
$$\hat{U}(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') \hat{U}(t', t_0)$$

iterieren
$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t')\right)$$

↑
 Zeitordnung
 (Operatoren zu
 kleineren Zeiten
 nach rechts)

(2. Ordnung : $\frac{1}{2!} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \hat{H}(t') \hat{H}(t'')$)
 wird $\frac{1}{2!} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \hat{H}(t') \hat{H}(t'')$

\hat{H} nicht zeitabh. :

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t - t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (t - t_0) \hat{H}\right)$$

2.3. Feynman - Pfadintegral

1 Teilchen mit Hamilton-Op $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$.

Ziel: Propagator $U(q_f, t_f; q_i, t_i) = \langle q_f | e^{-i/\hbar \hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle$
 $\hat{=}$ Zeitentwicklungsop in Ortsdarstellung

Zeitdiskretisierung: in Schritten $\varepsilon = \frac{t_f - t_i}{M}$ (am Ende $M \rightarrow \infty$)
 $(\hat{=}$ Trotter-Zerlegung)

$$t_n = t_i + n\varepsilon \quad ; \quad t_0 = t_i, \quad t_M = t_f \\ q_0 = q_i, \quad q_M = q_f$$

Einschieben von Eins-Operatoren für Zwischenschritte:

$$U(q_f, t_f; q_i, t_i) = \langle q_f | (e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}})^M | q_i \rangle \\ = \int \prod_{k=1}^{M-1} d^d q_k \langle q_f | e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}} | q_{M-1} \rangle \langle q_{M-1} | e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}} | q_{M-2} \rangle \\ \langle q_{M-2} | e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}} | q_i \rangle$$

Umschreiben des Matrixelemente:

$$\langle q_n | e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}(\hat{q}, \hat{p})} | q_{n-1} \rangle = \int d^d p_n \underbrace{\langle q_n | p_n \rangle}_{\frac{e^{i q_n p_n / \hbar}}{(2\pi\hbar)^{d/2}}} \langle p_n | e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}(\hat{q}, \hat{p})} | q_{n-1} \rangle$$

Zur Berechnung von $\langle p_n | e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}} | q_{n-1} \rangle$: Näherung, die im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ exakt wird.

Dazu: Normalgeordneter Operator: $\hat{O}(\hat{q}, \hat{p})$: für jeden Op. $\hat{O}(\hat{q}, \hat{p})$,
 wobei in Produkten \hat{p} links und \hat{q} rechts steht.

Beispiel: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})$

$$\leadsto : e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}} : = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon\right)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! (n-k)!} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m}\right)^k (V(\hat{q}))^{n-k}$$

Normal geordneter Operator unterscheidet sich von ursprünglichem Op durch Kommutatoren:

$$e^{-i/\hbar \varepsilon H(\hat{q}, \hat{p})} = : e^{-i/\hbar \varepsilon H(\hat{q}, \hat{p})} : - \left(\frac{\varepsilon}{\hbar}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\varepsilon/\hbar)^n}{(n+2)!} (\hat{H}^{n+2} - : \hat{H} :^{n+2})$$

Wenn $e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}}$ durch $: e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}} :$ genähert wird, ist Fehler $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Matrixelemente mit $: e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}} :$ ergeben sich direkt:

$$\langle p_n | : e^{-i \frac{\varepsilon}{\hbar} H(\hat{q}, \hat{p})} : | q_{n-1} \rangle = e^{-i \frac{\varepsilon}{\hbar} H(q_{n-1}, p_n)} \underbrace{\langle p_n | q_{n-1} \rangle}_{e^{i q_{n-1} p_n / \hbar}} \underbrace{(2\pi\hbar)^{d/2}}$$

Es folgt:

$$U(q_f, t_f; q_i, t_i) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^{M-1} \left(d^d q_k \frac{d^d p_k}{(2\pi\hbar)^d} \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^M (p_k (q_k - q_{k-1}) - H(q_{k-1}, p_k) \varepsilon) \right)$$

Die Menge von Punkten $\{(q_k, p_k)\}$ kann als Trajektorie im Phasenraum verstanden werden. ACHTUNG: nicht kontinuierlich, nicht differenzierbar!

Im Limes $M \rightarrow \infty$ bietet sich symbolische Notation an:

$$\int \prod_{k=1}^{M-1} \left(d^d q_k \frac{d^d p_k}{(2\pi\hbar)^d} \right) \longrightarrow \int_{q_i, t_i}^{q_f, t_f} \mathcal{D}[q(t)] \mathcal{D}[p(t)]$$

$$\varepsilon \sum_{k=1}^M p_k \frac{(q_k - q_{k-1})}{\varepsilon} \longrightarrow \int_{t_i}^{t_f} dt p \dot{q}$$

Dann

$$U(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int \mathcal{D}[q] \int \mathcal{D}[p] \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (p \dot{q} - H(q, p)) \right)$$

Feynman-Pfadintegral im Phasenraum

(Randbed nur im Ortsraum!)

Für $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ lassen sich die Impulsintegrale ausführen:

$$\int \frac{d^d p_k}{(2\pi\hbar)^d} e^{i/\hbar p_k (q_k - q_{k-1}) - i/\hbar \frac{p_k^2}{2m} \epsilon}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{d/2} e^{i/\hbar \frac{m}{2} \frac{(q_k - q_{k-1})^2}{\epsilon}}$$

Im Limes $M \rightarrow \infty$:

$$\int \prod_{k=1}^{M-1} d^d q_k \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{Md}{2}} \rightarrow \int_{q_i, t_i}^{q_f, t_f} \mathcal{D}[q(t)]$$

$$\frac{(q_k - q_{k-1})^2}{\epsilon^2} \rightarrow \dot{q}^2$$

Dann:

$$U(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int_{q_i, t_i}^{q_f, t_f} \mathcal{D}[q] e^{i/\hbar S[q]}$$

mit

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}, t) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right)$$

Feynman-Pfadintegral im Ortsraum

Diskussion

- Übergangsamplitude $\hat{=}$ Summe aller Pfade, gewichtet mit Phase.
Phase ist Wirkung $S[q]$ in Einheiten von \hbar .

Vgl. klassisch! $S \rightarrow \min$ ergibt einen Pfad,

dies ist äquivalent zu einer Sattelpunktnäherung des Pfadintegrals

- Pfadintegralformulierung kann als Grundlage der QM benutzt werden,
Feynman, Rev. Mod. Phys. 20, 367 (1948)
Feynman/Hellmann, Quantum Mechanics and Path Integrals (1965)

Allgemeine Zeitentwicklung eines Wellenfunkts

$$|\psi(t_f)\rangle = \hat{U}(t_f, t_i) |\psi(t_i)\rangle$$

$$\langle q_f | \psi(t_f) \rangle = \int d^d q_i \langle q_f | \hat{U}(t_f, t_i) | q_i \rangle \langle q_i | \psi(t_i) \rangle$$

$$\psi(t_f, q) = \int d^d q' \mathcal{U}(q, t_f, q', t_i) \psi(t_i, q')$$

2.4. Pfadintegral in Imaginärzeit und Zustandssumme

Zustandssumme für 1 Teilchen:

$$Z = \text{Sp } e^{-\beta \hat{H}} = \int dq \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle$$

Wegen $e^{-\beta \hat{H}} = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} (-i\hbar\beta)}$ entspricht dies einer Propagation in Imaginärzeit τ , hier $\tau_f - \tau_i = \beta \hbar$.

Pfadintegral für Evolution in Imaginärzeit (für $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$):

$$\begin{aligned} \underline{U(q_f, \tau_f; q_i, \tau_i)} &= \langle q_f | e^{-(\tau_f - \tau_i) \hat{H} / \hbar} | q_i \rangle \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^{M-1} \left(d^d q_k \frac{d^d p_k}{(2\pi\hbar)^d} \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^M \left(p_k (q_k - q_{k-1}) - \epsilon H(q_{k-1}, p_k) \right) \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^{M-1} d^d q_k \left(\frac{m}{2\pi\epsilon\hbar} \right)^{\frac{Md}{2}} \exp \left[-\frac{\epsilon}{\hbar} \sum_{k=1}^M \left(\frac{m}{2} \frac{(q_k - q_{k-1})^2}{\epsilon^2} + V(q_{k-1}) \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}[q(\tau)] \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q(\tau)) \right) \right] \\ &= \int_{q_i, \tau_i}^{q_f, \tau_f} \mathcal{D}[q(\tau)] e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau H(q(\tau))} \end{aligned}$$

Achtung: Realzeit & Lagrange-Fkt \longleftrightarrow Imaginärzeit & Hamilton-Fkt
 (Eigenschaft der Wick-Rotation $t \leftrightarrow i\tau$,
 denn $dq/d\tau = -i \frac{dq}{dt} \hat{=} \text{Vorzeichenwechsel in kinetischer Energie}$)

Damit Zustandssumme $\hat{=}$ Summe über periodische Pfade:

$$Z = \int dq U(q, \beta; q, 0) = \int_{q(0)=q(\beta\hbar)} \mathcal{D}[q(\tau)] e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau H(q(\tau))}$$

2.5. Freies Teilchen in 1d

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

$$\begin{aligned}
 U(q_f, t_f, q_i, t_i) &= \langle q_f | e^{-i/\hbar \hat{p}_{2m}^2 (t_f - t_i)} | q_i \rangle \\
 &= \int dp e^{-i/\hbar p_{2m}^2 (t_f - t_i)} e^{i/\hbar p (q_f - q_i)} \frac{1}{2\pi\hbar}
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)} \right)^{1/2} \exp \left(i \frac{m}{2\hbar} \frac{(q_f - q_i)^2}{t_f - t_i} \right)$$

$\frac{i}{\hbar} S_{kl}$ denn:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}, t) = \int dt \frac{m}{2} \dot{q}^2$$

$$S_{kl} = (t_f - t_i) \frac{m}{2} \left(\frac{q_f - q_i}{t_f - t_i} \right)^2$$

2.6. Harmonischer Oszillator (1d)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 \hat{q}^2$$

Eigenzustände

$$\psi_n(q) = c_n H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{q}{\ell}, \quad \ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \frac{1}{(\sqrt{\pi} 2^n n!)^{1/2}}$$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$H_n(x) \hat{=}$ Hermite-Polynom

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2 = -2 + 4x^2, \dots$$

klass.
Wirkung

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$$

Klassische Bahn $q_{kl}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

Randbed. \curvearrowright

$$q_{kl}(t) = \frac{q_i \sin(\omega(t_f - t)) + q_f \sin(\omega(t - t_i))}{\sin(\omega(t_f - t_i))}$$

$$S[q_{kl}] = \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} \left[(q_f^2 + q_i^2) \cos \omega T - 2q_f q_i \right] \quad T = t_f - t_i$$

(Test $\omega \rightarrow 0 \hat{=}$ freies Teilchen: $S[q_{kl}] = \frac{m}{2} \frac{(q_f - q_i)^2}{T}$)

Pfadintegral

Entwickeln der Wirkung um klas. Pfad (exakt - i.v.):

$$q(t) = q_{kl}(t) + \chi(t)$$

$$S[q] = S[q_{kl}] + \int dt \underbrace{\frac{\delta S}{\delta q(t)}}_{=0} \Big|_{q_{kl}} \chi(t)$$

$$+ \frac{1}{2} \int dt dt' \frac{\delta^2 S}{\delta q(t) \delta q(t')} \Big|_{q_{kl}} \chi(t) \chi(t') + \dots$$

2. Ableitung der Wirkung:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta q(t') \delta q(t)} = \frac{\delta}{\delta q(t')} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

Für $L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q)$: $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -V'(q) - m\ddot{q}$

$$\delta \frac{\delta S}{\delta q(t)} = \int dt' (-V''(q(t')) \delta q(t') - m \delta \ddot{q}(t')) \delta(t-t')$$

$$\rightarrow \frac{\delta^2 S}{\delta q(t') \delta q(t)} = \left(-V''(q(t)) - m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \delta(t-t')$$

Harmonischer Oszillator:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta q(t') \delta q(t)} = -m \delta(t-t') \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 \right)$$

Bem.: 3. und höhere Ordnungen verschwinden, da L quadratisch in q !

$$\rightarrow S[q] = S[q_{kl}] + \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow U(q_f, t_f; q_i, t_i) &= \int_{q_i, t_i}^{q_f, t_f} \mathcal{D}[q] e^{i/\hbar S[q]} \\ &= e^{i/\hbar S[q_{kl}]} \underbrace{\int_{0, t_i}^{0, t_f} \mathcal{D}q e^{i/\hbar S[q]}}_{U(0, t_f; 0, t_i)} \end{aligned}$$

Man kann zeigen: $U(0, t_f; 0, t_i) \propto \frac{1}{\sqrt{\sin \omega(t_f - t_i)}}$ (Altland/Simon)

$$\rightarrow U(q_f, t_f; q_i, t_i) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[q_{kl}] \right) \quad T = t_f - t_i$$

mit $S[q_{kl}] = \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} \left[(q_f^2 + q_i^2) \cos \omega T - 2q_f q_i \right]$

Propagator
harmonischer Osz

Diskussion

- Limes $\omega \rightarrow 0$ reproduziert U für freies Teilchen:

$$U(q_f, t_f; q_i, t_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar T}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{kl}\right)$$

$$\text{mit } S_{kl} = \frac{m}{2} \frac{(q_f - q_i)^2}{T}$$

- Singularität bei $\sin \omega T = 0$:

Vierfache von halber Periode \rightarrow (klassisch) unmögliche Pfade für $q_i \neq q_f$

- Pfadintegral für Zustandssumme folgt aus:

$$U(q, t; \beta, q', 0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi \hbar \sinh t\omega\beta}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar \sinh t\omega\beta} \left((q^2 + q'^2) \cosh t\omega\beta - 2qq'\right)\right]$$

$$= \sum_n e^{-\beta E_n} \underbrace{\langle q | n \rangle \langle n | q' \rangle}_{\varphi_n(q)}$$

$\beta \rightarrow \infty$: Ablesen von E_0 und $\varphi_0(q)$!

Weiter:

$$Z = \int_{\mathcal{P}} e^{-\beta H} = \int dq U(q, t; \beta, q', 0)$$

$$\stackrel{\text{Gauß-Int}}{=} \frac{1}{2 \sinh \frac{t\omega\beta}{2}}$$

$$= \sum_n e^{-\beta E_n} \quad \left(E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)$$

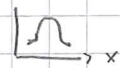
2.7. Klassischer Grenzfall

Klassischer Grenzfall $\hat{=}$ Wirkung / \hbar groß ($\hbar \rightarrow 0$)

Klassische Bahn $S \rightarrow \min$

Propagator $U(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int \mathcal{D}[q] e^{i/\hbar S[q]}$

Nötig: Behandlung schnell oszillierender Integranden

Betrachte: $I(\lambda) = \int dx e^{-\lambda \phi(x)}$ mit $\lambda \rightarrow \infty$ 

$$\tilde{I}(\lambda) = \int dx e^{-i\lambda \phi(x)}$$

Entwickeln um x_0 mit $\phi'(x_0) = 0$; $\tilde{x} = x - x_0$:
 Minimum

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= e^{-\lambda \phi(x_0)} \int d\tilde{x} e^{-\lambda \left(\frac{1}{2} \phi'' \tilde{x}^2 + \frac{1}{6} \phi''' \tilde{x}^3 + \dots \right)} \\ &= e^{-\lambda \phi(x_0)} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int d\tilde{s} e^{-\frac{\phi''}{2} \tilde{s}^2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\phi'''}{6} \tilde{s}^3 + \dots} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \tilde{s}^2 = \lambda \tilde{x}^2 \end{aligned}$$

Terme bis \tilde{s}^2 :

$$I(\lambda) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \phi''(x_0)}} e^{-\lambda \phi(x_0)} \quad \text{"Näherung des steilsten Anstiegs"}$$

Analog

$$\tilde{I}(\lambda) \approx \sqrt{\frac{-2\pi i}{\lambda \phi''(x_0)}} e^{-i\lambda \phi(x_0)} \quad \text{"Näherung der stationären Phase"}$$

(Mehrere Pkt mit $\phi' = 0 \rightarrow$ summieren!)

Damit folgt

$$\int_{q_i, t_i}^{q_f, t_f} \mathcal{D}[q] e^{i/\hbar S[q]} \approx \sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_f}} e^{i/\hbar S_{kl}}$$

mit $q_{kl}(t)$ aus $\delta S / \delta q \Big|_{q_{kl}} = 0$.

Die 2. Ableitung von S kann explizit ausgewertet werden

für $L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q)$ mittels Entwicklung um den klass.

Pfad: $q(t) = q_{kl}(t) + \chi(t)$. Dann:

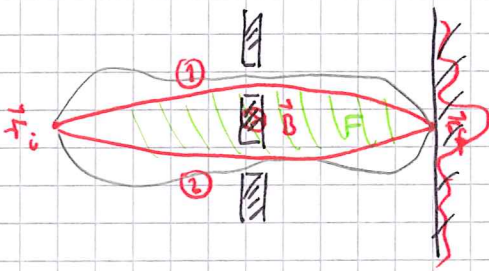
$$S[q] = S[q_{kl}] + \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2} \dot{\chi}^2 - \frac{1}{2} V''(q_{kl}(t)) \chi^2 \right) + \mathcal{O}(\chi^3)$$

Einsetzen in Näherung stationärer Phase:

$$\int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}[q] e^{i/\hbar S[q]} \approx e^{i/\hbar S_{kl}} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar} f(t_f)}$$

mit Funktion f : $\ddot{f} + \omega^2(t) f = 0$, $\omega^2(t) = \frac{V''(q_{kl}(t))}{m}$, $f(t_i) = 0$,
 $\dot{f}(t_i) = 1$.

2.8. Aharonov-Bohm-Effekt



Elektronen (geladen) durch Doppelspalt.
 Interferenzmuster hängt von \vec{B} -Feld ab,
 obwohl $\vec{B} = 0$ für alle möglichen
 Elektronenorte!

Dazu:

$$U(r_f t_f, r_i t_i) = \int_{r_i t_i}^{r_f t_f} \mathcal{D}[\vec{r}] e^{i/\hbar S[\vec{r}]}$$

mit

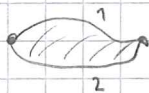
$$L = \underbrace{\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2}_{L_0} + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}$$

↪

$$S[\vec{r}] = S_0[\vec{r}] + \frac{e}{c} \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}}_{\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} d\vec{r} \cdot \vec{A}}$$

Für zwei verschiedene Wege gilt

$$\int_{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{A} - \int_{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{A} = \oint d\vec{r} \cdot \vec{A} = \underbrace{\int d\vec{F} \cdot \vec{B}}_{\text{Fluss}}$$



Aufspalten des Propagators in Beiträge von Wegen vom Typ ① und ②:
Phase $\vec{r} \cdot \vec{A}$ vernachlässigt!

$$U(r_f t_f, r_i t_i) \stackrel{!}{=} \left(\int_{\text{①}} + \int_{\text{②}} \right) \mathcal{D}[\vec{r}] e^{i/\hbar S[\vec{r}]}$$

$$\approx \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} \int_{\text{①}} d\vec{r} \cdot \vec{A}\right) \underbrace{\int_{\text{①}} \mathcal{D}[\vec{r}] e^{i/\hbar S_0[\vec{r}]}}_{P_1}$$

$$+ \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} \int_{\text{②}} d\vec{r} \cdot \vec{A}\right) \underbrace{\int_{\text{②}} \mathcal{D}[\vec{r}] e^{i/\hbar S_0[\vec{r}]}}_{P_2}$$

$$|U(r_f t_f, r_i t_i)|^2 = |P_1 + e^{i\varphi} P_2|^2$$

mit

$$\varphi = \frac{e}{\hbar c} \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{A} = \frac{e}{\hbar c} \Phi_F$$

$$2\pi \frac{\Phi_F}{\Phi_0}, \quad \Phi_0 = \frac{hc}{e}$$

↪ Interferenzverschiebung ist durch
 eingeschlossenen Fluss
 bestimmt (nichtlokal!)

2.9. Ausblick: Pfadintegrale mit kohärenten Zuständen

Feynman-Pfadintegral: Eigenzustände von \hat{q} und \hat{p}

Pfadint. mit koh. Zuständen: Eigenzustände von \hat{a} (Vernichtungsop.)

Also: $a_\alpha |\phi\rangle = \phi_\alpha |\phi\rangle$ für $[a_\alpha, a_\alpha^\dagger] = \delta_{\alpha\alpha}$

Dann $Z = \int \rho e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}$ mit \hat{H} in 2. Quantisierung

Trotter-Zerlegung ergibt

$$\langle \phi_k | e^{-\varepsilon(\hat{H} - \mu\hat{N})} | \phi_{k-1} \rangle$$

Jetzt Normalordnung mit a nach rechts, a^\dagger nach links für $\hat{H}(\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\alpha)$:

$$\langle \phi_k | e^{-\varepsilon(\hat{H} - \mu\hat{N})} | \phi_{k-1} \rangle = \langle \phi_k | \phi_{k-1} \rangle e^{-\varepsilon [H(\phi_{\alpha k}^*, \phi_{\alpha k-1}) - \mu \sum_\alpha \phi_{\alpha k}^* \phi_{\alpha k-1}]}$$

Symbolisch:

$$Z = \int \mathcal{D}[\phi_\alpha^*(\tau), \phi_\alpha(\tau)] \exp \left[- \int_0^{\hbar\beta} d\tau \sum_\alpha \phi_\alpha^*(\tau) (\partial_\tau - \mu) \phi_\alpha(\tau) + H(\phi_\alpha^*(\tau), \phi_\alpha(\tau)) \right]$$

Diese Formulierung ermöglicht flexible Darstellung von Vielteilchen Theorie:

- Sattelpunktnäherungen $\phi(\tau) \rightarrow \phi$ ($\hat{a} \rightarrow \langle a \rangle$)
- Energieabh. Wechselwirkung (nach Fourier. traf.)