5. Bose-Einstein-Kondensation und Suprafluidität

Gase aus Bosonen:

Bose-Einstein-Kondensation bei tiefen T

2001 Nobelpreis (Cornell / Ketterle / Wiemann): BEC von verdünnten Alkali-Atomen bei $2\mu K$

5.1. Erinnerung Quantenstatistiken idealer Gase

Wir betrachten ein System aus N identischen nichtwechselwirkenden quantenmechanischen Teilchen, beschrieben durch den Hamiltonoperator,

$$\hat{H}(1,\dots,N) = \sum_{j=1}^{N} \hat{h}(j) ,$$

wobei $j = (\vec{r}_j, \sigma_j)$ für die Orts- und Spinvariable eines Teilchens steht.
Der Einteilchen-Hamiltonoperator h besitzt (Einteilchen-) Eigenzustände

$$\hat{h} |\lambda\rangle = \varepsilon_\lambda |\lambda\rangle .$$

Der Hilbertraum des N-Teilchen-Systems läßt sich aus Zustandsvektoren aufbauen, die ein direktes Produkt von Einteilchenzuständen sind,

$$\Phi^P(1,\dots,N) = \varphi_{\lambda_1}(1)\, \varphi_{\lambda_2}(2) \dots \varphi_{\lambda_N}(N) ,$$

wobei $\varphi_\lambda(j) = \langle j | \lambda \rangle$ die Einteilchenwellenfkt in der Ortsdarstellung bezeichnet. Diese stellen eine vollständige Orthonormalbasis dar

Φ ist außerdem Eigenzustand von H:

$$\hat{H} |\Phi_n^P\rangle = E_n |\Phi_n^P\rangle , \quad E_n = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_{\lambda_j}$$

Für identische, nicht lokalisierbare (und damit nicht numerierbare!) Teilchen gilt das Postulat:

! Zustände, die sich nur durch Austausch zweier identischer Teilchen unterscheiden, sind äquivalent, d.h. sie führen zu gleichen beobachtbaren Eigenschaften.

Den Austausch zweier Teilchen kann man mittels eines Permutationsoperator $\hat{P}_{ij}$ formulieren, der die Teilchen i und j austauscht:

$$\hat{P}_{ij}\,\Phi(1,\dots,i,j,\dots,N) = \Phi(1,\dots,j,i,\dots,N)$$

Aus der Invariant physikalischer Eigenschaften folgt die Forderung

$$\underline{\hat{P}_{ij}\,\Phi = e^{i\theta}\,\Phi},$$

denn Zustände $e^{i\theta}\Phi$ mit beliebiger Phase θ bilden den Satz unitär äquivalenter Zustände.

In $D=3$ Dimensionen läßt sich dies mit zwei Klassen von Vielteilchenzuständen erfüllen:

1. Symmetrische Zustände, $\hat{P}_{ij}\Phi = \Phi \quad \forall\, \hat{P}_{ij}$ „Bosonen"
2. Antisymmetrische Zustände, $\hat{P}_{ij}\Phi = -\Phi$ „Fermionen"

Bemerkungen:

- Eine genauere Untersuchung der Permutationen ergibt:
  - $D=3$: $\theta = 0, \pi$ $\longrightarrow$ Bosonen & Fermionen
  - $D=2$: θ beliebig $\longrightarrow$ „Anyonen"
  - $D=1$: θ beliebig Irrelevant, da kein Teilchenaustausch möglich
- Im Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie folgt das „Spin-Statistik-Theorem":
  Fermionen besitzen halbzahligen Spin $(s=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;
  Bosonen besitzen ganzzahligen Spin $(s=0, 1, \dots)$.

Aus den Eigenwerten ± 1 des Permutationsoperators läßt sich die Struktur der q.m. Vielteilchenzustände ableiten.

Für Bosonen gilt: (Im folgenden sei $\hat{P}^{(p)}$ ein Permutationsoperator, der p Permutationen von jeweils 2 Teilchen bewirkt.)

Total symmetrische Zustände können als Summe über alle $N!$ Permutationen von Teilchen geschrieben werden,

$$|\Phi_s\rangle = K_s \sum_{P^{(p)}} \hat{P}^{(p)} |\Phi\rangle \qquad (K_s : \text{Normierung}),$$

mit $K_s = \left(N! \prod_\lambda n_\lambda!\right)^{-1/2}$, n_λ: Besetzungszahlen der Einteilchenzustände

Für Fermionen gilt:

Total antisymmetrische Zustände kann man analog bilden:

$$|\Phi_a\rangle = K_a \sum_{P^{(p)}} (-1)^p \hat{P}^{(p)} |\Phi\rangle$$

mit $K_a = (N!)^{-1/2}$ (hier $n_\lambda = 0, 1$ wegen Pauli-Prinzip)

Wir berechnen nun die Zustandssumme für ein System identischer, nichtwechselwirkender Bosonen oder Fermionen, d.h.

$$\hat{H} = \sum_j{}' h(j) \quad , \qquad h\,|\lambda\rangle = \varepsilon_\lambda\,|\lambda\rangle .$$

Die Berechnung ist besonders einfach in der großkanonischen Gesamtheit:

$$Z_G = \sum_N \sum_{\substack{n_{\lambda_1} \\ \sum n_\lambda = N}} e^{-\beta(E-\mu N)} = \sum_{n_{\lambda_1}}{}' \sum_{n_{\lambda_2}} \cdots e^{-\sum_\lambda \beta n_\lambda(\varepsilon_\lambda-\mu)} \qquad (\beta = 1/kT)$$

$$= \prod_\lambda Z_\lambda$$

Offensichtlich faktorisiert die Zustandssumme, mit

$$Z_\lambda = \sum_{n_\lambda} e^{-n_\lambda(\varepsilon_\lambda-\mu)/kT}$$

Für Bosonen ist:

$$Z_\lambda^B = \sum_{n_\lambda=0}^{\infty} e^{-\beta n_\lambda(\varepsilon_\lambda-\mu)} = 1 + e^{\sim} + (e^{\sim})^2 + \ldots = \frac{1}{1-e^{-(\varepsilon_\lambda-\mu)/kT}}$$

Für Fermionen gilt:

$$Z_\lambda^F = \sum_{n_\lambda=0,1} e^{-\beta n_\lambda(\varepsilon_\lambda-\mu)} = 1 + e^{-(\varepsilon_\lambda-\mu)/kT}$$

Aus Z_G erhält man in üblicher Weise das großkan. td. Potential

$$\Omega(T,V,\mu) = -kT \ln Z_G$$

Insbesondere kann man die mittleren Besetzungszahlen der Einteilchenniveaus berechnen:

$$\langle n_\lambda\rangle = \frac{1}{Z_\lambda}\, kT \frac{\partial}{\partial\mu} Z_\lambda = \frac{1}{Z_\lambda}\sum_{n_\lambda} n_\lambda\, e^{-\beta n_\lambda(\varepsilon_\lambda-\mu)}$$

Man erhält für Bosonen die sogenannte Bose-Einstein-Verteilung,

$$\langle n_\lambda\rangle^B = \frac{1}{e^{(\varepsilon_\lambda-\mu)/kT}-1} \equiv n_B(\varepsilon_\lambda-\mu)$$

und für Fermionen die Fermi-Dirac-Verteilung,

$$\langle n_\lambda\rangle^F = \frac{1}{e^{(\varepsilon_\lambda-\mu)/kT}+1} \equiv n_F(\varepsilon_\lambda-\mu)$$

Für hohe Energien ε_λ gilt in beiden Fällen $\langle n_\lambda\rangle \approx e^{-(\varepsilon_\lambda-\mu)/kT}$.

(Dies gilt auch im Hochtemp.-Limes wegen $\mu/kT \gg 1$, siehe später.) (Maxwell-Boltzmann)

5.2. Erinnerung Bose-Einstein-Kondensation ww-freier Bosonen

Mittlere Teilchenzahl

$$\langle \hat{N} \rangle = \sum_\lambda \langle n_\lambda \rangle = \sum_\lambda \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} - 1} \qquad (\mu \leq \varepsilon_\lambda^{min} \equiv 0)$$

Ausdrücken über Zustandsdichte $\rho(\varepsilon) = \sum_\lambda \delta(\varepsilon_\lambda - \varepsilon)$:

$$\langle \hat{N} \rangle = \int d\varepsilon \; \rho(\varepsilon) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

Typische Zustandsdichte (gemittelt oder im td. Limes)

$\rho(\varepsilon) \propto \varepsilon^{1/2}$ Kasten in $d = 3$

$\rho(\varepsilon) \propto \varepsilon^{2}$ Harmonisches Potential in $d = 3$

Annahme: $\rho(\varepsilon) = C_\alpha \, \varepsilon^{\alpha - 1}$ (für $\varepsilon \geq 0$, sonst 0)

Dann

$$\langle \hat{N} \rangle = C_\alpha \int_0^\infty d\varepsilon \; \varepsilon^{\alpha-1} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

$$= C_\alpha \sum_{k=1}^\infty z^k \int_0^\infty d\varepsilon \; \varepsilon^{\alpha-1} e^{-\beta k \varepsilon} \qquad \text{mit } z = e^{\beta\mu} \text{ (Fugazität)}$$

$$\frac{q}{1-q} = \sum_{k=1}^\infty q^k$$

$$\underset{x = k\beta\varepsilon}{=} C_\alpha (k_B T)^\alpha \underbrace{\left(\sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k^\alpha} \right)}_{g_\alpha(z)} \underbrace{\int_0^\infty dx \, x^{\alpha-1} e^{-x}}_{\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!}$$

Also: $\langle \hat{N} \rangle = C_\alpha (k_B T)^\alpha g_\alpha(z) \, \Gamma(\alpha)$ $\hat{=}$ Gleichung für μ bei festem $\langle \hat{N} \rangle$

Für $T \to 0$ ist $\langle \hat{N} \rangle$ n.U. beschränkt, denn

$$g_\alpha(z) = \sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha} = \zeta(\alpha)$$

Riemannsche Zeta-Fkt ($\zeta(\alpha) < \infty$ für $\alpha > 1$)

$\curvearrowright \langle \hat{N} \rangle \leq C_\alpha (k_B T)^\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) \longrightarrow 0$ für $T \to 0$ und $\alpha > 1$.

Deshalb muss für $T < T_c$ der Einteilchen-Grundzustand makroskopisch besetzt werden:

$$\langle \hat{N} \rangle = \underbrace{\frac{z}{1-z}}_{\langle \hat{N}_0 \rangle} + C_\alpha (k_B T)^\alpha g_\alpha(z) \, \Gamma(\alpha)$$

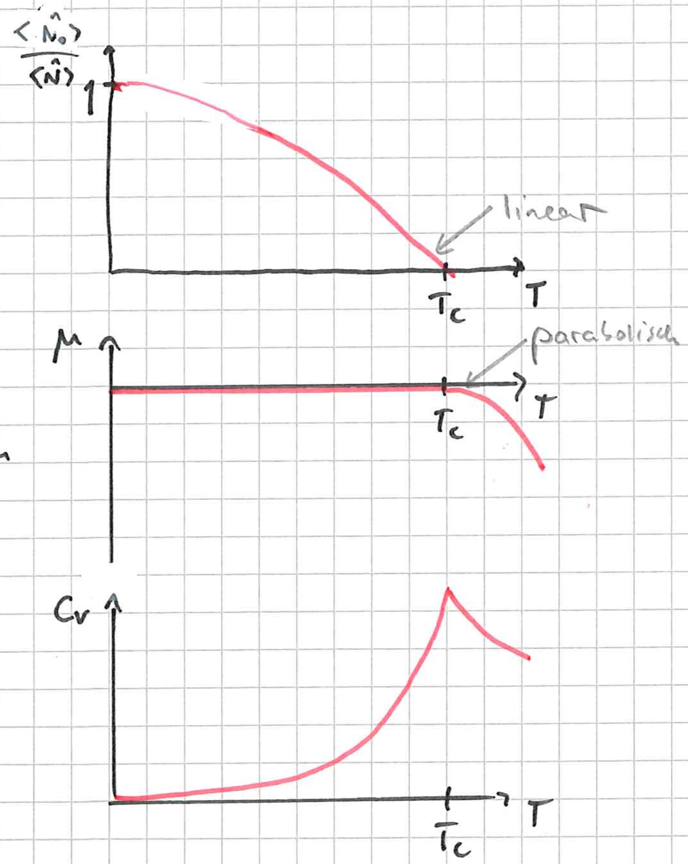
$\mu \to 0^-$ im Kondensatzustand

T_c ergibt sich aus der Forderung, dass oberhalb von T_c keine makroskopische Besetzung auftritt:

$$\langle \hat{N} \rangle = c_\alpha (k_B T_c)^\alpha \, \zeta(\alpha) \, \Gamma(\alpha)$$

Die Teilchenzahl im Kondensat folgt als:

$$\frac{\langle \hat{N}_0 \rangle}{\langle \hat{N} \rangle} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^\alpha \underbrace{\frac{g_\alpha(z)}{\zeta(\alpha)}}_{=1 \text{ im td. limes für } T<T_c}$$



Der Kondensationsübergang des wechselwirkungsfreien Bose-Gases ist „pathologisch":

- besitzt Umwandlungswärme (wie Übergang erster Ordnung)
- Kondensat verschwindet kontinuierlich bei T_c (wie Übergang zweiter Ordnung)
- $\partial C_V / \partial T$ ist singulär (wie Übergang dritter Ordnung)

Mit Wechselwirkung ändern sich die kritischen Eigenschaften, und der Kondensationsübergang wird zu einem Übergang zweiter Ordnung.

5.3. Bosonen mit Wechselwirkung

Zwei Teilchen - WW $\quad U(\vec r_1 - \vec r_2)$

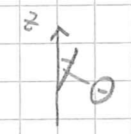
Hier: ladungsneutrale Teilchen $\curvearrowright$ kurzreichweitige WW

Einfachstes Modell: Kontaktpotential

$$U(\vec r) = g\,\delta(\vec r)$$

≙ Wellenlänge >> Ausdehnung des Potentials

Erinnerung: Streutheorie (1 Teilchen + Streupotential)



Ansatz Wellenfkt (für $r \to \infty$)
$$\psi(\vec r) = e^{ikz} + f(\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

Wirkungsquerschnitt
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

Partialwellenzerlegung (keine φ-Abh $\curvearrowright m=0$)

Legendre-Pol
$$\psi(\vec r) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l\, P_l(\cos\theta)\, R_{kl}(r)$$

mit (für $r \to \infty$)
$$R_{kl}(r) \propto \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l + \delta_l\right)$$

Streuphasen δ_l enthalten Information über Streuung ($e^{i2\delta_l}$ ist Phasendrehung im Kanal l, Amplitude einl. = ausl. wg. DI-Erhaltung)

Man erhält
$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left(e^{2i\delta_l} - 1\right) P_l(\cos\theta)$$

(keine Streuung: $\delta \to 0$)

Bornsche Näherung $\quad \delta_l \propto k^{2l+1} \quad$ (schwaches Potential)

Langsame Stöße ($k \to 0$) $\curvearrowright$ nur s-Wellen-Streuung ($l=0$)

Def „Streulänge" a: $\quad \delta_0 =: -k\,a$

Kontaktpotential $U(\vec r) = g\,\delta(\vec r)$ liefert $\quad g = \dfrac{4\pi\hbar^2 a}{m}$.

5.4. Kondensation schwach wechselwirkender Bosonen

Wechselwirkendes Box-Gas:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \hat{h}(\vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} u(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

mit $\hat{h}(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} + V(\vec{r})$

und $u(\vec{r}) = g\, \delta(\vec{r})$

Ziel: Bestimmung des Grundzustandes $\varphi_0(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ (nicht exakt lösbar)

Ansatz:

$$\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \varphi_0(\vec{r}_1)\, \varphi_0(\vec{r}_2) \cdots \varphi_0(\vec{r}_N)$$

$\hat{=}$ „Kondensation" in Einteilchenzustand φ_0, dabei wird φ_0 variationell bestimmt
(konzeptionell vernünftig für schwache WW)

Dazu:

$$E[\psi] = \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \to \min$$

Explizit:

$$E[\psi] = N \int d^3r\, \varphi_0^*(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r})\right) \varphi_0(\vec{r}) + N(N-1) \frac{g}{2} \int d^3r\, |\varphi_0(\vec{r})|^4$$

Variation nach φ_0 mit Nebenbedingung $\langle \psi | \psi \rangle = 1$:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta \left(E - \mu N \left(\int d^3r |\varphi_0|^2 - 1\right)\right)}{\delta \varphi_0^*(\vec{r})} = N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r})\right) \varphi_0(\vec{r}) + N(N-1)\, g\, |\varphi_0(\vec{r})|^2 \varphi_0(\vec{r}) - N\mu\, \varphi_0(\vec{r})$$

Also:

$$\left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r})\right) + g(N-1)\, |\varphi_0(\vec{r})|^2\right] \varphi_0(\vec{r}) = \mu\, \varphi_0(\vec{r})$$

Gross-Pitaevski-Gleichung
(nichtlineare Schrödinger-Gl. für „Kondensat"-Wellenfkt)

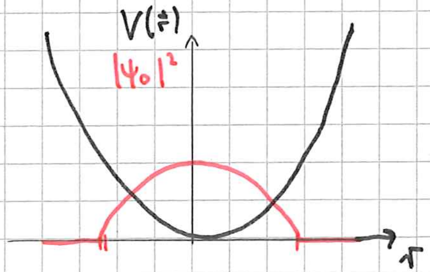
Lösen der Gross-Pitaevski-Gleichung:

- Numerisch
- Variationell (φ_0 parametrisieren)
- Thomas-Fermi-Näherung, für $g > 0$ (abstoßend) und N groß

Dabei: kinetische Energie vernachlässigen

$$\rightsquigarrow \quad |\varphi_0(\vec r)|^2 = \begin{cases} \dfrac{\mu - V(\vec r)}{g(N-1)} & \text{für } \mu > V(\vec r) \\ 0 & \text{für } \mu < V(\vec r) \end{cases}$$

Bsp $V(\vec r)$ Oszillatorpotential



Bemerkung: Es ist nützlich, eine „Kondensat-Wellenfkt" einzuführen gemäß

$$\psi_0 = N^{1/2}\,\varphi_0 \,.$$

Dann $\quad N = \int d^3\, |\psi_0|^2 \,.$

5.5. Kollektive Anregungen und Symmetriebrechung

Gesucht: Elementare Anregungen des kondensierten Vielteilchen-Grundzustandes

Erinnerung: Zweite Quantisierung

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Bosonen in Einteilchenzuständen

$a_\lambda^+,\ a_\lambda$ mit $[a_\lambda, a_{\lambda'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'}$.

Einteilchen-Operator $\hat{O} = \sum_{\lambda\lambda'} O_{\lambda\lambda'}\, \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_{\lambda'}$ mit $O = O^{T*}$

Einteilchen-Hamilton-Op in Eigenbasis $\sum_i \hat{h}(i) = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda\, \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda$ (Impulsdarstellung: $\lambda \hat{=} q$)

WW-Hamilton-Op mit Impulserhaltung $\hat{H}_U = \frac{1}{V} \sum_{p,p',q} v^{M_{pp'q}}\, \hat{a}^+_{p+q}\, \hat{a}^+_{p'-q}\, \hat{a}_{p'}\, \hat{a}_p$

Fock-Zustände
$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$
$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

Ortsbasis Notation $\hat{a}_{\vec{R}} \to \hat{\psi}(\vec{R})$

$$[\hat{\psi}(\vec{R}), \hat{\psi}^+(\vec{R}')] = \delta(\vec{R}-\vec{R}')$$

Trafo
$$\hat{\psi}(\vec{R}) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(\vec{R})\, \hat{a}_\alpha$$
$$\hat{a}_\alpha = \int d^3R\, \hat{\psi}(\vec{R})\, \varphi_\alpha^*(\vec{R})$$

Einteilchen-Operator in Ortsbasis: $\hat{O} = \sum_{\alpha\beta} O_{\beta\alpha}\, \hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\alpha$

$$= \sum_{\alpha\beta} a_\beta^+ \int d^3r\, \varphi_\beta^*(\vec{r})\, \hat{O}(\vec{r})\, \varphi_\alpha(\vec{r})\, a_\alpha$$

$\hat{O}(\vec{r},\vec{r}') \propto \delta(\vec{r}-\vec{r}')$ orthogonal !!

$$= \int d^3r\, \hat{\psi}^+(\vec{r})\, \hat{O}(\vec{r})\, \hat{\psi}(\vec{r})$$

Diff-Op im Ortsraum, wirkt auf $\hat{\psi}(\vec{r})$

Op im Fock-Raum

Wechselwirkendes Bose-Gas in 2. Quantisierung

$$\hat{H} = \int d^3r \; \hat{\psi}^+(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right) \hat{\psi}(\vec{r})$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3r\, d^3r' \; \hat{\psi}^+(\vec{r})\, \hat{\psi}^+(\vec{r}')\; U(\vec{r}-\vec{r}')\; \hat{\psi}(\vec{r}')\, \hat{\psi}(\vec{r})}_{\text{Kontakt-WW: } \frac{g}{2}\int d^3r \; \hat{\psi}^+(\vec{r})\, \hat{\psi}^+(\vec{r}')\, \hat{\psi}(\vec{r}')\, \hat{\psi}(\vec{r})}$$

Kondensat-WF

$$|\psi\rangle = \frac{(a^+_{\varphi_0})^N}{\sqrt{N!}} \, |vac\rangle$$

Jetzt: Fluktuationen um kondensierten Zustand

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \underset{\uparrow\, \mathbb{C}\text{-Zahl!}}{\psi_0(\vec{r})} + \delta\hat{\psi}(\vec{r})$$

Vernachlässigen von $\delta\hat{\psi}$ macht aus $\hat{H}$ die Gross-Pitaevskii-Energie (mit $\psi_0(\vec{r}) \equiv \sqrt{N}\,\varphi_0(\vec{r})$)

Nun: $\hat{H}$ entwickeln in $\delta\hat{\psi}$ um ψ_0.

Nullte Ordnung $\rightsquigarrow$ Gross-Pitaevskii-Energie

Erste Ordnung $\rightsquigarrow$ Null, da $\frac{\delta(H-\mu N)}{\delta\psi_0} = 0$ per Konstruktion. (Variation!)

Zweite Ordnung

$$\hat{H}_2 = \int d^3r \left[\delta\hat{\psi}^+(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}) + 2g\,|\psi_0|^2\right) \delta\hat{\psi}(\vec{r}) + \text{h.c.} \right.$$
$$\left. + \frac{g}{2}\, \psi_0^2 \; \delta\hat{\psi}^+ \delta\hat{\psi}^+(\vec{r}) + \text{h.c.} \right]$$

Teilchenzahl nicht erhalten!

Dies ist ein bilineares Problem der Form

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2}\int d^3r \; (\delta\hat{\psi}^+ \;\; \delta\psi) \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\hat{\psi} \\ \delta\hat{\psi}^+ \end{pmatrix} + \text{const.}$$

mit $A = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}) + 2g\,|\psi_0|^2$

$B = g\,\psi_0(\vec{r})^2$

Explizite Rechnung im Kastenpotential ($V(\vec{r}) = 0$ im Volumen $V = L^3$):

Einteilchenbasis $\varphi_k(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, Energien $\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

Kontinuum!

Hamilton-Op

$$\hat{H} = \sum_k \varepsilon_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \frac{g}{2V} \sum_{kk'q} \hat{a}^+_{k+q} \hat{a}^+_{k'-q} \hat{a}_{k'} \hat{a}_k$$

lokale WW mit Impulserhaltung

Kondensation in Zustand $\varphi_{k=0}$ (Lsg der G-P-Gleichung im homogenen Fall!)

„Fluktuationsfreier" Kondensat-Zustand $\hat{a}_0 \to a_0 \in \mathbb{C}$ ($\hat{=}\ \hat{\psi} \to \psi_0 \in \mathbb{C}$),

dabei ist $|a_0|^2 = N_0$ die Zahl der Teilchen im Kondensat.

Fluktuationen werden beschrieben durch $\hat{a}_{k\neq 0}$.

Hamilton-Op für Fluktuationen in 2. Ordnung

$$\hat{H}_2 = \sum_{k\neq 0} \left[(\varepsilon_k + g n_0)\, \hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \frac{g n_0}{2} \left(\hat{a}_k \hat{a}_{-k} + \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+ \right) \right]$$

mit $n_0 = \frac{N_0}{L^3}$ (und $a_0 = \sqrt{N_0}$, als reell angenommen).

Matrixform:

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2} \sum_{k\neq 0} \begin{pmatrix} \hat{a}_k^+ & \hat{a}_{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ B_k^* & A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{a}_{-k}^+ \end{pmatrix} + \text{const}$$

mit $A_k = \varepsilon_k + g n_0$

$B_k = g n_0$

Diagonalisierung von $\hat{H}_2$ mittels Bogoliubov-Transformation:

Dazu Einführen neuer Teilchen $\hat{\alpha}_k$ mit $[\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}^+] = \delta_{kk'}$

und

$$\hat{\alpha}_k^+ = u_k \hat{a}_k^+ + v_k \hat{a}_{-k}$$

$\hat{H}_2$ umschreiben in $\hat{\alpha}$-Operatoren. Für geeignete Wahl der u_k, v_k verschwinden die $\alpha^+\alpha^+$ und $\alpha\alpha$-Terme, und man erhält (siehe Übung):

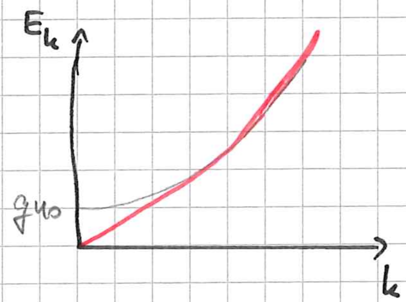
$$\hat{H}_2 = \sum_{k \neq 0} E_k \, \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_k + \text{const.}$$

mit Anregungsenergien

$$E_k = \sqrt{A_k^2 - |B_k|^2} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2 + 2 g n_0 \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$$

Dieses E_k erfüllt:

$$E_k = \begin{cases} \hbar c k & k \text{ klein} \\ \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g n_0 & k \text{ groß} \end{cases} \qquad \left(c^2 = \frac{g n_0}{m}\right)$$



Wechselwirkungen transformieren Dispersion der Anregungen von $E_k \sim k^2$ (Einteilchen-Anregung) zu $E_k \sim k$ (kollektive Anregung!)

(Grundzustand von $\hat{H}_2$ ist $|vac\rangle$; Anregungen sind $\hat{\alpha}_k^+ |vac\rangle$)

Zusammenhang mit spontaner Symmetriebrechung

Kondensiertes Bose-Gas ist beschrieben durch eine makroskopische Kondensat-Wellenfkt ($\hat{=}$ Ordnungsparameter)

$$\psi_0 = |\psi_0| e^{i\theta}$$

Die Phase θ ist beliebig, dies entspricht einer $U(1)$-Symmetrie, die im kondensierten Zustand spontan gebrochen wird.

Goldstone-Theorem

Die spontane Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie in einem System mit kurzreichweitigen Wechselwirkungen impliziert die Existenz einer Anregungsmode, für deren Dispersion ω_k gilt: $\lim_{k\to 0} \omega_k = 0$.

(anschaulich: Mode mit $k=0$ überführt System in symmetrie-äquivalenten Zustand $\hat{=}$ „restauriert Symmetrie")

Beispiele:

Festkörper: Kont. Translationssymmetrie gebrochen, Goldstone-Mode ist akustisches Phonon

Ferromagnet: Rotationssymmetrie im Spinraum gebrochen, Goldstone-Mode ist Spinwelle (Magnon)

Hier: Bose-Einstein-Kondensat: $U(1)$-Phasensymm. gebrochen, Goldstone-Mode ist obige Mode mit $E_k \propto k$ („Phonon")

5.6. Suprafluidität

Kondensierter Zustand ist charakterisiert durch makroskopische Wellenfkt. $\psi(\vec r)$ (vgl. Gross-Pitaevski). Dieser Zustand kann einen Suprastrom tragen. Dazu:

Q.M. Stromoperator $\hat{\vec{j}} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\hat\psi^+ \vec\nabla \hat\psi - (\vec\nabla \hat\psi^+)\hat\psi \right)$

Mit $\psi = \underbrace{|\psi|}_{\sqrt{n_0}} e^{i\phi}$: Strombeiträge von $\begin{cases} \nabla n_0 & \rightarrow \text{ normaler Strom} \\ \nabla \phi & \rightarrow \text{ Suprastrom} \end{cases}$

Inhomogene Dichten: energetisch ungünstig → ✗

Inhomogene Phase: kostet wenig Energie (Goldstone!)

↷ $$\boxed{\vec{j_s} = \frac{\hbar n_0}{m} \vec\nabla \phi}$$

Zustand mit Phasengradient trägt Strom im Gleichgewicht!

Wie kann stabiler Strom im Gleichgewicht fließen?

(normalerweise: Streuung an Hindernissen ↷ Erzeugung von Anregungen
↷ Energieverlust, Aufheizen, Dissipation)

Landau-Argument

Massenelement Δm hat kinetische Energie $E_1 = \frac{\Delta m}{2} v_s^2$ (v_s: Geschw. des Supraflusses)

Annahme: Streuprozess erzeugt Anregung mit Impuls $\vec p$ und Energie $\varepsilon(\vec p)$ im mitbewegten Bezugssystem (Suprflüssigkeit), dann ist die Energie im Laborsystem (Galilei!):

$$E_2 = \frac{\Delta m}{2} v_s^2 + \vec p \cdot \vec v_s + \varepsilon(\vec p)$$

Energieerhaltung erfordert $E_1 = E_2$ (v_s unverändert), d.h.

$\varepsilon(\vec p) = -\vec p \cdot \vec v_s$, d.h. $|\vec p|\,|\vec v_s| \geq \varepsilon(\vec p)$.

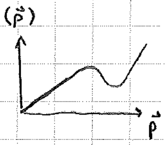
Anregungen des kondensierten Zustands haben $\varepsilon(\vec p) = \overset{c}{\overset{\parallel}{v^*}}|\vec p|$,

folglich kann Bedingung nicht erfüllt werden für $|\vec v_s| < v^*$.

Dies definiert v^* $\left(= \min\left(\frac{\varepsilon(\vec{p})}{|\vec{p}|}\right)\right)$ als kritische Geschwindigkeit; der Fluss mit $v_s < v^*$ ist dissipationsfrei!

Erinnerung: $v^{*c} \propto \sqrt{g}$ ↝ Wechselwirkung ist entscheidend für Suprafluidität!

^{4}He



Bemerkungen

- Konzept der makroskopischen Besetzung des niedrigsten Einteilchenzustandes ist nur sinnvoll für schwache WW

- Charakteristika des kondensierten Zustands jenseits schwacher WW:

  (i) Linear dispergierende Anregungsmode

  (ii) Phasensteifigkeit des Kondensats

  $$\delta E = \frac{\rho_s}{2} \int d^d r \, (\nabla \phi)^2 \quad , \quad \rho_s > 0 \text{ für } T < T_c$$

  (iii) $\exists$ Phasenübergang 2. Ordnung bei $T = T_c$

- Allgemeiner:

  System mit spontan gebrochener kontinuierlicher Symmetrie kann dissipationsfreien Strom tragen

  Bsp:

Supraflüssigkeit:	Teilchenstrom
Supraleiter:	Ladungsstrom
Festkörper:	Impulsstrom
Ferromagnet:	~~Spinstrom~~ Magnetisierungsstrom