

## 6. Supraleitung und Anderson-Higgs-Mechanismus

Suprafluidität: Kondensat ladungsneutraler Bosonen

Supraleitung: Kondensat geladener Fermion-Paare  
(Ladung koppelt an langreichweitige Coulomb-WW)

Bem.: Suprafluidität von ladungsneutralen Fermion-Paaren möglich  
(kette Atome,  $^3\text{He}$ )

### Phänomenologie von Supraleitern

- $\rho(T) = 0$  für  $T < T_c$
- Meißner-Effekt: Magnetfeld wird aus Innerem des Supraleiters verdrängt

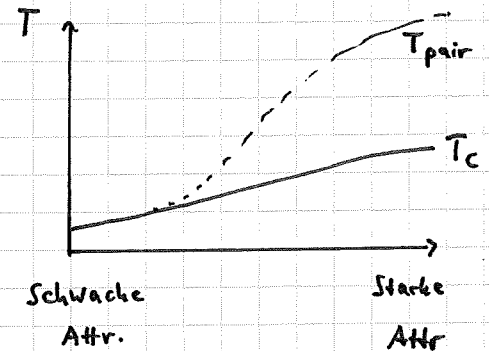
### Im folgenden theoretische Aspekte

- Attraktive WW zwischen Fermionen  $\leadsto$  Paarbildung  $\leadsto$  Kondensation
- Einfluss der Coulomb-WW auf Kondensat-Physik  
 $\leadsto$  Anderson-Higgs-Mechanismus

# 6.1. Attraktive Wechselwirkung

- stark: Paarbildung bei hohen Temp ( $\rightarrow$  Moleküle), BEC von Molekülen (kohärent bei hohen T)
- schwach: Paarbildung und Kondensation simultan  $\leadsto$  BCS-Theorie

BEC-BCS-Crossover kann als Fkt der WW-Stärke beobachtet werden (z.B. in ultrakalten Atomgasen)



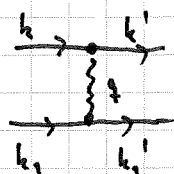
In Festkörper entsteht effektiv attraktive WW zwischen Elektronen

- a) durch Phononen (schwach,  $\leadsto$  konventionelle Supraleiter) oder
- b) durch andere kollektive Anregungen (z.B. magnetische Anregungen,  $\leadsto$  unkonventionelle Supraleiter)

## Attraktive WW durch Phononen

$$\hat{H}_{el-ph} = \sum_{k, k', q, \sigma} M_q \hat{c}_{k+q, \sigma}^\dagger \hat{c}_{k, \sigma} (\hat{b}_q + \hat{b}_{-q}^\dagger)$$

Effektive WW



$$V_{eff} = \sum_q M_q^2 \frac{2\omega_q}{\omega^2 - \omega_q^2}$$

Phononen disp  
↑  
ausgetauschte Energie

Abschätzungen:  $q \sim k - k' \lesssim 2k_F$

$$\omega_q \lesssim \omega_D \quad (\text{Debye, } \omega_q \sim \text{graph})$$

Schwache WW:  $\omega \ll \omega_D$  ( $\omega \sim \Delta_{gap} \sim k_B T_c$ )

$$\leadsto V_{eff} \approx - \frac{M_q^2}{\omega_D} < 0$$

attraktive WW für kleine Fermion-Energien, kann über Coulomb-WW dominieren

(wichtig: Retardierung wg.  $V_F \gg c_{ph}$ )

# 6.2. BCS - Theorie

Allgemeiner Hamilton-Op mit <sup>zwei Kernen -</sup> Wechselwirkung :

$$\hat{H} = \sum_{k\sigma} \epsilon_k \hat{c}_{k\sigma}^\dagger \hat{c}_{k\sigma} + \frac{1}{N} \sum_{kk'} V_{kk'} \hat{c}_{k\uparrow}^\dagger \hat{c}_{k'\uparrow}^\dagger \hat{c}_{k'\sigma} \hat{c}_{k\sigma}$$

Fermi-Gas im Festkörper
Anzahl Impulse in BZ (Gitter!)

$$[c_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}^\dagger]_+ = \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'}$$

Im Supraleiter findet Paarbildung i.a. zwischen Elektronen mit entgegengesetzt gleichem Impuls und verschiedenen Spin statt.  
 ~ nur Beiträge mit  $k = -k'$  und  $\sigma = -\sigma'$  berücksichtigen.

Rechnung großkanonisch ~ betrachte  $\hat{K} = \hat{H} - \mu \hat{N}$ .

Vereinfachter Hamilton-Op:

$$\hat{K} = \sum_{k\sigma} (\epsilon_k - \mu) \hat{c}_{k\sigma}^\dagger \hat{c}_{k\sigma} + \frac{1}{N} \sum_{kk'} V_{kk'} \hat{c}_{k\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-k\downarrow}^\dagger \hat{c}_{-k'\downarrow} \hat{c}_{k'\uparrow}$$

(mit  $V_{kk'} = \begin{cases} -V & |k_{x1}|, |k_{x2}| < w_D \text{ (Phononen: } w_D) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ )

Idee BCS (aus Cooper - Instabilität):

Paarbildung beschrieben durch Erwartungswert  $\langle \hat{c}_{-k\downarrow} \hat{c}_{k\uparrow} \rangle$ .

Effizient mittels Molekularfeldnäherung.

Dazu Operator  $\hat{b}_k = \hat{c}_{-k\downarrow} \hat{c}_{k\uparrow}$ .

$$\hat{H}_{MW} = \frac{1}{N} \sum_{kk'} V_{kk'} \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'}$$

Molekularfeldnäherung:  $\hat{b}^\dagger \hat{b} \rightarrow \hat{b}^\dagger \langle \hat{b} \rangle + \langle \hat{b}^\dagger \rangle \hat{b} - \langle \hat{b}^\dagger \rangle \langle \hat{b} \rangle$   
 (  $(\hat{b}^\dagger - \langle \hat{b}^\dagger \rangle)(\hat{b} - \langle \hat{b} \rangle)$  vernachlässigt)

Mit der Definition  $b_k = \langle \hat{c}_{-k\downarrow} \hat{c}_{k\uparrow} \rangle$

ergibt sich Hamilton-Op in Molecularfeldnäherung:

$$\hat{K}_{MF} = \sum_{k\sigma} \xi_k \hat{c}_{k\sigma}^\dagger \hat{c}_{k\sigma} + \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{kk'} V_{kk'} (b_{k'} \hat{c}_{k\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-k\downarrow}^\dagger + \text{h.c.} - b_{k'} b_{k'}^*)$$

### Bemerkungen

- Molecularfeld  $b_k$  ist komplex
- $K_{MF}$  ist nicht teilchenzahl erhaltend ( $\leadsto$  großkanonisch)

Es bietet sich an, die sog. Gapfunktion  $\Delta_k$  Dimension Energie einzuführen:

$$\Delta_k := -\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k'} V_{kk'} \langle \hat{c}_{-k'\downarrow} \hat{c}_{k'\uparrow} \rangle$$

dann

$$\hat{K}_{MF} = \sum_{k\sigma} \xi_k \hat{c}_{k\sigma}^\dagger \hat{c}_{k\sigma} - \sum_k (\Delta_k \hat{c}_{k\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-k\downarrow}^\dagger + \text{h.c.} - \Delta_k b_k^*)$$

( $\Delta \neq 0 \hat{=}$  Paarsbildung  $\hat{=}$  Supraleitung)

„BCS-Hamilton-Op“

Lösung von  $\hat{K}_{MF}$ :

Bogoliubov-Transformation

Matrixform:

alle  $k$ , kein Faktor  $1/2$

$$\hat{K}_{MF} = \sum_k \begin{pmatrix} \hat{c}_{k\uparrow}^\dagger & \hat{c}_{-k\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_k & \Delta_k \\ \Delta_k^* & -\xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_{k\uparrow} \\ \hat{c}_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} + \text{const}$$

$\xi_k = \xi_{-k}$

Neue Fermionen  $\hat{\gamma}_{k\sigma}$ :

$$\begin{aligned} \hat{c}_{k\uparrow} &= u_k^* \hat{\gamma}_{k\uparrow} + v_k \hat{\gamma}_{-k\downarrow}^\dagger \\ \hat{c}_{-k\downarrow} &= u_k^* \hat{\gamma}_{-k\downarrow} - v_k \hat{\gamma}_{k\uparrow}^\dagger \end{aligned}$$

Mit  $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$  erfüllen die  $\gamma_k$  fermionische Vertauschungsrelationen:  $[\hat{\gamma}_{k\sigma}, \hat{\gamma}_{k'\sigma'}^\dagger] = \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'}$

Einsetzen von  $\hat{c} \rightarrow \hat{\gamma}$  in  $\hat{K}_{MF}$ . Wählen von  $u, v$  so, dass Terme der Form  $\hat{\gamma}\hat{\gamma}$  und  $\hat{\gamma}^\dagger\hat{\gamma}^\dagger$  verschwinden.

Lösung: 
$$\left. \begin{array}{l} |u_k|^2 \\ |v_k|^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\xi_k}{E_k} \right) \quad \text{mit} \quad \underline{E_k = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2}}$$
 und  $2u_k v_k = \Delta_k / E_k$

Dies ergibt diagonale Hamilton-Op:

$$\underline{\hat{K}_{MF}} = \sum_{k\sigma} \underline{\bar{E}_k} \hat{\gamma}_{k\sigma}^\dagger \hat{\gamma}_{k\sigma} + \text{const}$$

$E_k \geq 0 \rightarrow$  Grundzustand ist Vakuum des  $\hat{\gamma}_{k\sigma}$ -Teilchen.

$\gamma \hat{=}$  Bogoliubov-Quasiteilchen des Supraleiters

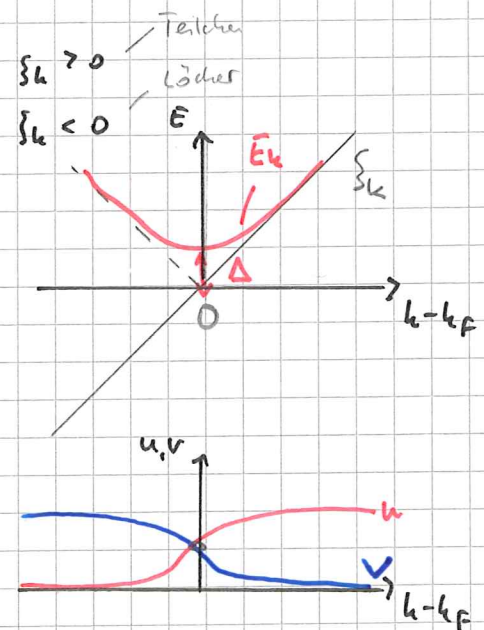
Achtung:  $\gamma$  besitzt wohl def. Impuls und spin, aber keine wohldefinierte Ladung (kein Eigenzustand zur Teilchenzahl!)

$\Delta = 0$  : Metall, hier  $u_k^2 = \begin{cases} 1 & \xi_k > 0 \\ 0 & \xi_k < 0 \end{cases}$

$\Delta \neq 0$  : Supraleiter

Falls  $\Delta = \text{const}$ , dann ist

$\Delta$  minimale Anregungsenergie



Noch zu bestimmen:  $\Delta_k$ .

Dazu: Selbstkonsistente Gap-Gleichung

$$\begin{aligned}\Delta_k &= -\frac{1}{N} \sum_{k'} V_{kk'} \langle c_{-k'd} c_{k'\uparrow} \rangle \\ &= -\frac{1}{N} \sum_{k'} V_{kk'} \underbrace{u_{k'} v_{k'}}_{\frac{1}{2} \Delta_{k'}/E_{k'}} \langle 1 - \underbrace{\sum_{\sigma} \hat{\gamma}_{k'\sigma}^\dagger \hat{\gamma}_{k'\sigma}}_{=0 \text{ bei } T=0} \rangle\end{aligned}$$

Gap-Gleichung für  $T=0$ :

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{\sqrt{\xi_{k'}^2 + |\Delta_{k'}|^2}}$$

BCS-Gap-Gleichung  
( $T=0$ )

$V < 0 \Rightarrow$  attr. WW

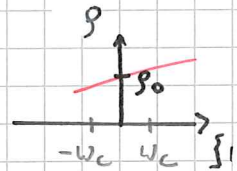
Lösung für vereinfachte WW:  $V_{kk'} = \begin{cases} -V & |\xi_k| < t w_c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Annahme (!)  $\Delta_k = \begin{cases} \Delta & |\xi_k| < t w_c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Triviale Lsg  $\Delta = 0$ .

Sonst:

$$1 = \frac{V}{2} \frac{1}{N} \sum_k \frac{1}{E_k} \approx \frac{V}{2} \rho_0 \int_{-t w_c}^{t w_c} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}$$



Zustandsdichte an Fermienerde

$$\frac{1}{\rho_0 V} = \int_0^{t w_c} d\xi \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} = \operatorname{arcsinh} \frac{t w_c}{\Delta}$$

$$\Delta(T=0) = \frac{t w_c}{\operatorname{sinh} \frac{1}{\rho_0 V}} \approx \underline{2 t w_c e^{-\frac{1}{\rho_0 V}}}$$

Resultat ist nicht-perturbativ in  $V$  (!).

$V \ll$  Bandbreite der Leitungselektronen ( $\sim 1/\rho_0$ )  $\rightarrow \Delta$  sehr klein

( $\rho_0 V \ll 1$ )

Gap-Gleichung für endliche T:  $\langle \hat{y}_k^{\uparrow} \hat{y}_k^{\downarrow} \rangle = \frac{1}{e^{\beta E_k} + 1}$

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_k V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{\sqrt{\xi_{k'}^2 + |\Delta_{k'}|^2}} \tanh \frac{\beta E_{k'}}{2}$$

$\Delta(T)$  verschwindet bei  $T \rightarrow T_c^-$ . Für  $V_{kk'} = \begin{cases} -V \\ 0 \end{cases}$  ergibt sich:

$$k_B T_c = 1.13 \frac{1}{2} \hbar \omega_c e^{-\frac{1}{50V}} = \frac{1.13}{2} \Delta(T=0)$$

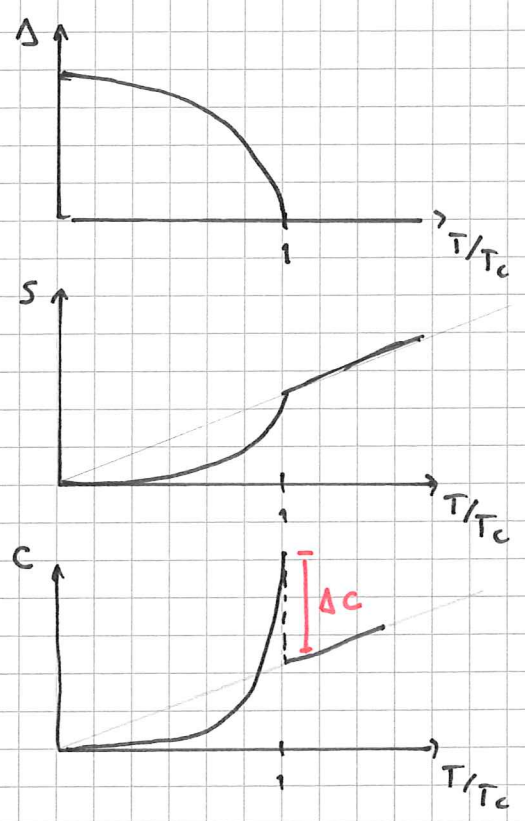
Im Rahmen von BCS-Theorie ist Verhältnis  $\frac{2\Delta(T=0)}{k_B T_c} \approx 3.5$  universell!

Nahel  $T_c$ ,  $\Delta(T) \propto \sqrt{T_c - T}$ .

Thermodynamik ist dominiert durch Anregungslücke bei  $T < T_c$ .

$\rightarrow C(T), S(T) \propto e^{-\Delta/k_B T}$

(elektronische Beiträge)



$\frac{\Delta C}{C(T_c)} \approx 1.43$  universell in BCS

# Einteilchen - Greenfkt im Supraleiter

$$\begin{aligned}\hat{K}_{MF} &= \sum_{k\sigma} \xi_k \hat{c}_{k\sigma}^\dagger \hat{c}_{k\sigma} - \sum_k (\Delta_k \hat{c}_{k\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-k\downarrow}^\dagger + \text{h.c.} - \Delta_k b_k^*) \\ &= \sum_k \hat{\underline{\Psi}}_k^\dagger \underline{h}_k \hat{\underline{\Psi}}_k + \text{const}\end{aligned}$$

mit  $\underline{h}_k = \begin{pmatrix} \xi_k & \Delta_k \\ \Delta_k^* & -\xi_k \end{pmatrix}$  und Nambu - Spinor  $\hat{\underline{\Psi}}_k = \begin{pmatrix} \hat{c}_{k\uparrow} \\ \hat{c}_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}$

Aus Kap 4.4. (dort freie Elektronen):  $G(k, z) = \frac{1}{z - \xi_k}$

Hier analog für Matrixpropagator:

$$\underline{G}_{\underline{\Psi}} = \langle\langle \hat{\underline{\Psi}}_k ; \hat{\underline{\Psi}}_k^\dagger \rangle\rangle, \quad \underline{G}_{\underline{\Psi}}^{-1}(k, z) = z \underline{1} - \underline{h}_k$$

Invertieren:  $\begin{pmatrix} z - \xi_k & -\Delta_k \\ -\Delta_k^* & z + \xi_k \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^2 - \xi_k^2 - |\Delta_k|^2} \begin{pmatrix} z + \xi_k & -\Delta_k^* \\ -\Delta_k & z - \xi_k \end{pmatrix}$   
 $-E_k^2$

Explizit:

$$\begin{aligned}(\underline{G}_{\underline{\Psi}})_{1,1} &= \langle\langle \hat{c}_{k\uparrow}^\dagger ; \hat{c}_{k\uparrow}^\dagger \rangle\rangle = \frac{z + \xi_k}{z^2 - E_k^2} \quad \text{" Elektron " } \\ (\underline{G}_{\underline{\Psi}})_{2,2} &= \langle\langle \hat{c}_{-k\downarrow}^\dagger ; \hat{c}_{-k\downarrow}^\dagger \rangle\rangle = \frac{z - \xi_k}{z^2 - E_k^2} \quad \text{" Loch " } \\ (\underline{G}_{\underline{\Psi}})_{1,2} &= \langle\langle \hat{c}_{k\uparrow}^\dagger ; \hat{c}_{-k\downarrow}^\dagger \rangle\rangle = -\frac{\Delta_k^*}{z^2 - E_k^2} \quad \text{anomaler Propagator}\end{aligned}$$

Bem. Alle Formeln folgen auch aus  $\langle\langle \hat{\gamma}_{k\sigma}^\dagger ; \hat{\gamma}_{k\sigma}^\dagger \rangle\rangle = \frac{1}{z - E_k}$

und  $\hat{c}_{k\uparrow}^\dagger = u_k \hat{\gamma}_{k\uparrow}^\dagger + v_k \hat{\gamma}_{-k\downarrow}^\dagger$ .

Alle Propagatoren haben Pole bei  $z = \pm E_k$  (Quasiteilchenenergie).

Z.B.  $(\underline{G}_{\underline{\Psi}})_{1,1} = \frac{|u_k|^2}{z - E_k} + \frac{|v_k|^2}{z + E_k}$  (Elektronen & Löcher mischen!)



BCS-Grundzustand

$$|\psi_0\rangle = \prod_k (u_k + v_k \hat{c}_{k\uparrow}^+ \hat{c}_{-k\downarrow}^+) |vac\rangle \quad |u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$$

$$(\text{Beweis: } \hat{\gamma}_{k\uparrow} |\psi_0\rangle = \hat{\gamma}_{k\downarrow} |\psi_0\rangle = 0)$$

Bemerkungen:

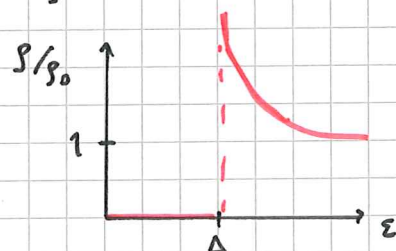
- $v_k \rightarrow 1$  weit unterhalb Fermi-Niveau } Zustände bei kleinen Energien besetzt (wie erwartet)
- $u_k \rightarrow 1$  weit oberhalb Fermi-Niveau }
- Nahe Fermi-Niveau: besetzte & unbesetzte Paarzustände überlagert
- $|\psi_0\rangle$  ist kein Eigenzustand von  $\hat{N} = \sum_{k\sigma} \hat{c}_{k\sigma}^+ \hat{c}_{k\sigma}$ .  
Aber  $\langle \Delta N^2 \rangle \ll N^2$  für  $N$  groß.
- $v_k/u_k$  (oder  $u_k v_k$ ) enthält komplexe Phase des Kondensats.  
Lösung der Gap-Gleichung kann mit globalen Phasenfaktor multipliziert werden  $\Delta_k \rightarrow \Delta_k e^{i\phi} \leadsto$  U(1)-Symmetrie,  
spontan gebrochen im supraleitenden Zustand
- $\Psi = \langle cc \rangle$  oder  $\Psi = \langle \hat{\psi} \hat{\psi} \rangle$  kann als Kondensat-WF interpretiert werden.  $\Psi = |\Psi| e^{i\phi} \leadsto \vec{\nabla} \phi$  entspricht Supraström. Supraström stabil wegen Anregungslücke (siehe später).

Anregungen des BCS-Grundzustandes  $\hat{\gamma}_{k\sigma} |\psi_0\rangle$ 

Zustandsdichte der Quasiteilchen-Anregungen:

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{V} \sum_k \delta(\varepsilon - E_k) \stackrel{\Delta_k = \Delta}{=} \rho_0 \int d\xi \delta(\varepsilon - \sqrt{\xi^2 + \Delta^2})$$

$$= \rho_0 \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}$$



## 6.3. Anderson - Higgs - Mechanismus

### Higgs - Mechanismus (allgemein):

∃ Boson (hier: Cooper-Paar), das an langreichweitige WW (hier: Coulomb) koppelt, die durch Eichfeld (hier:  $A^\mu$ ) repräsentiert werden kann.

∃ Symmetrie-gebrochene Phase (hier: Supraleitender Zustand), wo Boson kondensiert. Im Ergebnis erhalten (Eich-) Teilchen des (Eich-) Feldes (hier: Photon) eine Masse; außerdem besitzt symmetriestaurierende kollektive <sup>(Phonon-)</sup> Mode ebenfalls eine Masse. Die (massive) Amplitudenmode der Kondensats wird Higgs-Mode (oder Higgs-Teilchen) genannt.

Also: Langreichweitige WW entscheidend!

(Goldstone - Theorem gilt nicht mit langreichweitiges WW)

## Quantenmechanik geladener Teilchen und Eichinvarianz:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - Q\vec{A})^2 + Q\phi \quad (SE)$$

Also:  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - Q\vec{A}$  ,  $\overset{\text{Energie}}{E} \rightarrow E - Q\phi$   
 $(\hbar=1)$   $\vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla} - iQ\vec{A}$  ,  $\partial_t \rightarrow \partial_t + iQ\phi$

Viererschreibweise:  $\partial_\mu = (\frac{i}{c} \partial_t, \vec{\nabla})$  ,  $A_\mu = (\frac{\phi}{c}, -\vec{A})$   
 $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iQA_\mu$

Eichtrafo:  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x)$   $(x^\mu = (ct, \vec{r}))$   
 $\hat{\psi}(x) \rightarrow e^{-iQ\Lambda(x)} \hat{\psi}(x)$   
 $\hat{\psi}^\dagger(x) \rightarrow e^{+iQ\Lambda(x)} \hat{\psi}^\dagger(x)$

Eichinvariant: Theorie invariant unter (\*) + (\*\*).

Damit klar: Phase des supraleitenden OP,  $\Psi = \langle cc \rangle = |\Psi| e^{i\theta}$ ,  
 ist nicht eichinvariant, sondern  $\theta \rightarrow \theta - Q^* \Lambda(x)$ .  
 " -2/e|

## Erinnerung: Landau - Theorie

Ziel: Effiziente phänomenologische Beschreibung von Phasenübergängen  
 (Problem: Ed. Größen singular  $\Gamma$  als Fkt von Kontrollparametern;  
 im folgenden Ferromagnet mit freier Energie  $F(T, H)$  und  $f = \frac{F}{V}$ )  
 an krit. Pkt

Startpunkt: (lokaler) Ordnungsparameter  $\Psi \begin{cases} \neq 0 & \text{geordnet} \\ = 0 & \text{ungeordnet} \end{cases}$   
 (Ferromagnet  $\Psi \equiv$  Magnetisierungsdichte)

Idee: Definiere verallgemeinertes Potential  $\bar{f}$ , welches zusätzlich  
 von Ordnungsparameter  $\Psi$  abhängt und als Fkt von  $\Psi$   
 nicht singular wird (!)  $\leadsto$  Entwicklung in  $\Psi$

Aus  $f(T, H)$  wird so  $\bar{f}(T, H; \Psi)$ , (kein Potential!).

Gleichgewichtszustand folgt aus

$$\left. \frac{\partial \bar{f}(T, H; \Psi)}{\partial \Psi} \right|_{\Psi_{\text{ggw}}} = 0. \quad \leadsto \Psi_{\text{ggw}}(T, H)$$

$$\text{Dann } f(T, H) = \bar{f}(T, H; \Psi_{\text{ggw}}(T, H)).$$

Entwickeln von  $\bar{f}$  in  $\Psi$  ( $\Psi$  klein nahe kontinuierlichem Phasenüberg.):

$$\bar{f}(T, H, \Psi) = f_0(T) + a(T)|\Psi|^2 + \frac{u(T)}{2}|\Psi|^4 + \dots - \Psi H$$

(Symmetrie  $\Psi \leftrightarrow -\Psi$  ohne Feld  $\leadsto$  nur gerade Potenzen erlaubt)

(Vektorcharakter von  $\vec{\Psi} \rightarrow |\Psi|^2 \rightarrow \vec{\Psi} \cdot \vec{\Psi}$ ,  $|\Psi|^4 \rightarrow |\vec{\Psi} \cdot \vec{\Psi}|^2$ )

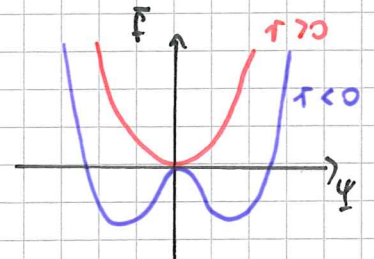
Temperaturabhängigkeit der Koeffizienten ist „glatt“.

Stabilität erfordert  $u > 0$  (sonst  $\Psi^6$ -Term nötig)

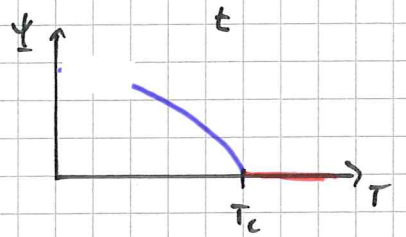
$f_0(T)$  kann häufig ignoriert werden.

Auswertung der Landau-Theorie für  $H=0$ :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \psi} = 0 \quad \leadsto \quad \psi = \begin{cases} 0 & \tau > 0 \\ \pm \sqrt{-\tau/u} & \tau < 0 \end{cases}$$



$\leadsto$   $\tau > 0$  unmagnetisiert ( $T > T_c$ )  $\leadsto \tau(T_c) = 0$ ,  $\tau(T) = \alpha \frac{T - T_c}{T_c}$   
 $\tau < 0$  magnetisiert ( $T < T_c$ )



$$\leadsto \psi = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \pm \sqrt{\alpha/u |t|} & T < T_c \end{cases}$$

Thermodynamik folgt aus  $f(T, H)$ .

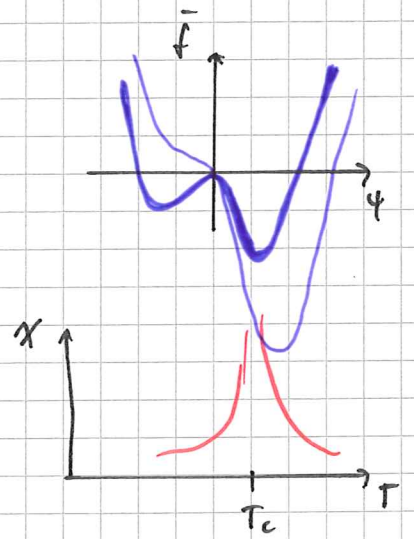
Auswertung der Landau-Theorie für  $H \neq 0$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \psi} = 0 \quad \leadsto \quad \alpha t \psi + u \psi^3 \stackrel{!}{=} H/2$$

Parametrisierung  $\psi(H) = \psi_{\text{spontan}} + \chi(T) H$

ergibt 
$$\chi(T) = \begin{cases} \frac{T_c}{2\alpha(T - T_c)} & T > T_c \\ \frac{1}{4\alpha(T_c - T)} & T < T_c \end{cases}$$

Curie-Weiß-Gesetz



Landau-Theorie ermöglicht vollständige Beschreibung der Physik kritischer Phänomene, mit mean-field-Exponenten.

Erweiterung: Ginzburg-Landau-Theorie

$\psi$  nicht räumlich homogen  $\leadsto \psi(\vec{r})$

Dann: freie Energiedichte inhomogen  $\leadsto F = \int d^3r f(\vec{r})$

Ginzburg-Landau:  $\bar{F} = \int d^3r \bar{f}(\vec{r})$ ,  $\bar{f}(\vec{r}) = \bar{f}(\psi(\vec{r}))$

Konkret: 
$$\bar{f} = f_0 + \tau |\psi|^2 + \frac{u}{2} |\psi|^4 + \alpha |\nabla \psi|^2 + \dots - \psi H$$

/ niedrigster erlaubter Gradientenwert

Formale Ableitung Anderson-Higgs-Mechanismus

Dazu: effektive Theorie für Ordnungsparameter  $\Psi(x,t)$ .

Lagrangedichte  $\mathcal{L}$ , Dynamik aus Euler-Lagrange-Gl.

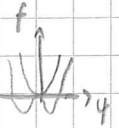
(Realzeit hier!)

Erinnerung: Landau-Theorie

$$f = r|\Psi|^2 + \frac{u}{2}|\Psi|^4$$

Ginzburg-Landau-Theorie

$$f = \kappa^2|\nabla\Psi|^2 + r|\Psi|^2 + \frac{u}{2}|\Psi|^4$$



Für neutrales Superfluid ist die Lagrangedichte ( $\hat{=}$  Ginzburg-Landau):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m^*} \overline{\partial^\mu} \Psi^* \overline{\partial}_\mu \Psi - r \Psi^* \Psi - \frac{u}{2} (\Psi^* \Psi)^2$$

für korrekte Vorfaktoren

$$\overline{\partial}_\mu = \left( \frac{1}{v} \partial_t, \vec{\nabla} \right)$$

Gleichzeitigkeit d. Goldstone-Mode

Euler-Lagrange  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*}$ :

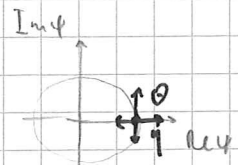
$$\left( \frac{1}{2m^*} \overline{\partial^\mu} \overline{\partial}_\mu + r + u \Psi^* \Psi \right) \Psi(x) = 0$$

$r > 0$ :  $\Psi = 0$  (symmetrische Phase  $\hat{=}$  kein Kondensat)

$r < 0$ :  $|\Psi|^2 = -\frac{r}{u}$  (kondensierte Phase)

Fluktuationen in kondensierter Phase:

$$\Psi(x) = e^{i\theta(x)} (\psi_0 + \eta(x))$$



$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{r}{u}}_{|\psi_0|^2} \frac{1}{2m^*} \overline{\partial^\mu} \theta \overline{\partial}_\mu \theta + \frac{1}{2m^*} \overline{\partial^\mu} \eta \overline{\partial}_\mu \eta + 2r\eta^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*}: \quad \overline{\partial^\mu} \overline{\partial}_\mu \theta = 0$$

Wellenge  $\hat{=}$  masselose Mode mit  $\omega = v|k|$  (Phasen-Mode)

$$\left( \frac{1}{2m^*} \overline{\partial^\mu} \overline{\partial}_\mu - 2r \right) \eta = 0$$

Klein-Gordon  $\hat{=}$  massive Mode

Ampplituden-Mode

$r < 0!$

Lehrt: geladenes Superfluid mit el. mag. Feld.

$$\underline{\mathcal{L} = \frac{1}{2m^*} (\overline{D}^\mu \Psi)^* (\overline{D}_\mu \Psi) - \tau \Psi^* \Psi - \frac{\mu}{2} (\Psi^* \Psi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}$$

Dabei ist  $\overline{D}_\mu = \partial_\mu + iQ^* A_\mu$ ,

hier  $\overline{D}_\mu = (\frac{c}{v} D_0, D_i) = (\frac{1}{v} \partial_t + \frac{c}{v} iQ^* \phi, \vec{\nabla} - iQ^* \vec{A})$ .

Außerdem  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  Feldstärketensor,  $\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  ist Feldenergie

Erinnerung: Der Feldanteil allein ( $\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ) ergibt bei Variation nach  $A^\mu$  die <sup>quellenfreien</sup> Maxwell-Gleichungen:  $\partial^\nu F_{\nu\mu} = 0$ .

Diese ergeben (Wellengleichung!) zwei transversale Moden ohne Energieleiche.

Variation des vollen Problems ergibt:

$$\frac{1}{2m^*} \overline{D}^\mu \overline{D}_\mu \Psi + \tau \Psi + \mu \Psi^* \Psi \Psi = 0$$

$$\text{(und } \frac{1}{2m^*} \overline{D}^{\mu*} \overline{D}_{\mu*} \Psi^* + \tau \Psi^* + \mu \Psi^* \Psi \Psi^* = 0 \text{)}$$

$$\frac{1}{2m^*} v_\mu^x (-iQ^* \Psi^* \overline{D}_x \Psi + iQ^* \Psi \overline{D}_x^* \Psi^*) + \partial^\nu F_{\nu\mu} = 0$$

$$\text{mit } v_\mu^x = \begin{pmatrix} cv \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie vorher: Existiert symmetrische Lsg <sup>für  $\tau > 0$</sup>   $\Psi = 0$ , mit Recht

$$\left( \frac{1}{2m^*} \overline{D}^\mu \overline{D}_\mu + \tau \right) \Psi = 0$$

massiv

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = 0$$

masselos (Photon)

Für die symmetriebrechende Phase  $\langle \Phi \rangle \neq 0$ , parametrisieren wir wieder

$$\Psi(x) = e^{i\Theta(x)} (\Psi_0 + \eta(x)).$$

Eichinvarianz: Phase  $\Theta(x)$  kann durch geeignete Eichung absorbiert werden. Wähle  $\Lambda(x) = \frac{1}{Q^*} \Theta(x)$ . Dann verschwindet  $\Theta$ , und  $\tilde{A}^\mu = A^\mu - \frac{1}{Q^*} \partial^\mu \Theta$ .

Variation ergibt:

$$\left( \frac{1}{2m^*} \bar{D}^\mu \bar{D}_\mu - 2r \right) \eta = 0 \quad \text{massiv (Higgs-Mode)}$$

$$v_\lambda^\mu v_\mu^\lambda \frac{1}{2m^*} \left( -\frac{r}{u} \right) \cdot 2Q^{*2} \cdot \tilde{A}^\mu + \partial^\nu F_{\nu\mu} = 0 \quad \text{massiv!}$$

umschreiben mittels  $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ :

$$\partial_\mu \tilde{A}^{\mu i} = 0$$

$$\left( \partial_\nu \partial^\nu + \frac{Q^{*2}}{m^*} |\Psi_0|^2 \right) \tilde{A}^i = 0 \quad (i=1,2,3)$$

$$\left( \partial_\nu \partial^\nu + \frac{Q^{*2}}{m^*} \frac{c^2}{v^2} |\Psi_0|^2 \right) \tilde{A}_0 = 0$$

Was ist passiert?

- Phasenmode ( $\Theta$ ) in  $\tilde{A}$  absorbiert (Eichung!).
- Fluktuation von  $\tilde{A}$  sind massiv und bestehen aus 3 (statt 2) Moden ( $\tilde{A}$ : vier Komponenten, 1 Bedingung  $\partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0$ )

Goldstone-Mode ist durch Ankopplung an Eichfeld „verschunden“.  
(Achtung: Eichung fixiert;  $\tilde{A}$  ist kein „Eichfeld“.)



## Konsequenzen: Meißner-Effekt

Statische Felder. Gleichung für  $\vec{A}$  ist äquivalent zu

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{A}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{c^2}{v^2} \frac{1}{\lambda_L^2} \phi$$

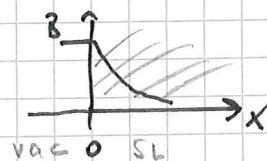
mit

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m^*}{Q^2 |\psi_0|^2}}$$

Eindring-  
tiefe

Lösung:  $B = B_0 e^{-x/\lambda_L} \hat{=} \text{magnetische Abschirmung im Supraleiter}$

„Meißner-Ochsenfeld-Effekt“



Weitere Gleichungen (aus Maxwell):

$$\text{rot } \vec{j}_s = \frac{Q^* n_s}{m^*} \vec{B} \quad (\vec{j}_s = \frac{Q^* n_s}{m^*} \vec{A} \text{ für } \text{div } \vec{A} = 0)$$

$$\vec{j}_s = \frac{Q^* n_s}{m^*} \vec{E} \hat{=} \text{ideales Leiter}$$

„London-Gleichungen“

## Physikalische Interpretation Anderson-Higgs:

- Maxwell-Gleichungen gültig
- Supraleiter erzeugt dissipationslose Abschirmströme
- Supraleitendes Kondensat kann als nichttriviales Vakuum für el. mag. Feld interpretiert werden

## 6.4. Unkonventionelle Supraleiter

Konventionell: Paarung durch Phononen,  $\Delta_k$  isotrop (s-Welle)

Unkonventionell:  $\Delta_k$ -Symmetrie nicht s-Welle, i.e. nicht durch Phononen

Gap-Gleichung war:

$$\Delta_k = - \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{\sqrt{\epsilon_{k'}^2 + |\Delta_{k'}|^2}}$$

$\Delta_k$  ist relevant nahe Fermifläche. Richtungsabhängigkeit von  $\Delta_k$  kann in Kugelflächenfit entwickelt werden

$\leadsto l = 0, 1, 2, \dots$  ( $\hat{=}$  Internem Drehimpuls des Cooper-Paars)

(Gitter: Entwicklung in irreduzible Darstellungen der Punktgruppe)

$l \neq 0 \leadsto \Delta_k$  hat Nullstellen  $\leadsto$  Thermodynamik hat Polyzustände! (steht  $e^{-\Delta/kT}$ )

Wodurch entsteht unkonventionelle Paarungssymmetrie?

- Coulomb-WW unterdrückt lokale Paarung,  $\Delta(\vec{r}=0) = 0$

- Wechselwirkung  $V_{kk'}$  kann stark impulsabhängig sein

Beispiel Annahme  $V_{kk'}$  stark für  $(k-k') = (\pm\pi, \pm\pi)$ ,

( $d=2$ ) dies trifft auf antiferromagnetische Spinflukt zu.

(Achtung:  $V_{kk'} > 0$  Ursache ist Coulomb!)

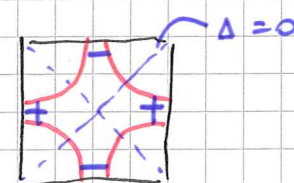
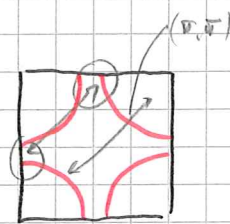
Annahme Quadratgitter mit Fermifläche

Summe in  $\Delta_k = - \frac{1}{2N} \sum_{k'} \frac{V_{kk'} \Delta_{k'}}{\epsilon_{k'}}$

hat große Beiträge für  $k' = k + (\pm\pi, \pm\pi)$ .

Kann erfüllt werden für  $\Delta_k$

mit d-Wellen-Symmetrie,  $\Delta_k = \Delta_0 (\cos k_x - \cos k_y)$



Realisiert in Kuprat-Hochtemperatur-SL.

## Weitere Aspekte

- Paar-Wellenfkt muss antisymmetrisch sein (Fermionen!).

Konventionell: Orbitalteil symmetrisch ( $\Delta(\vec{r}) = \Delta(-\vec{r})$ ),

Spharisch antisymmetrisch (Singulett)

Allgemeiner:  $l$  gerade  $\rightarrow$  <sup>Sph</sup> Singulett ( $S=0$ )

$l$  ungerade  $\rightarrow$  Sph Triplett ( $S=1$ )

Triplett - Paarung: Kondensat trägt Spin!

- Paare können endlichen Schwerkraftimpuls haben (FFLO)

- Supraleitung kann mit Magnetismus koexistieren

- Paarung kann in „schlechten“ Metallen auftreten

(keine freien Elektronen für  $T > T_c$ )