Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. M. Vojta
Dr. L. Janssen
T. Micallo

Theoretische Physik (Master)
2. Übung

Wintersemester 2020/21

1. Freiheiten bei infinitesimalen Zeitentwicklungen — 4 Punkte

Betrachten Sie ein System, das durch einen zeitunabhängigen Hamilton-Operator $\hat{H}$ beschrieben ist, und dessen zeitliche Evolution durch die Schrödinger-Gleichung bestimmt sei. Ziel der Aufgabe ist es, das zugehörige Pfadintegral in einer allgemeinen Form herzuleiten.

a) — 1 Punkt

Bestimmen Sie den Ausdruck des Operators $\hat{U}(t, t_0)$, der die Evolution eines Zustands zwischen den Zeiten t_0 und t beschreibt. Zerlegen Sie dann das Zeitintervall $\Delta t = t - t_0$ in N gleich große Teilintervalle δt, und drücken Sie die Gesamtevolution durch die N Teilevolutionen aus.

Hinweis: Für Operatoren $\hat{X}$, $\hat{Y}$ mit $[\hat{X}, [\hat{X}, \hat{Y}]] = 0 = [\hat{Y}, [\hat{X}, \hat{Y}]]$ können Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel $e^{\hat{X}} e^{\hat{Y}} = e^{\hat{X}+\hat{Y}} e^{[\hat{X},\hat{Y}]/2}$ nutzen.
Ergebnis (zum Weiterrechnen): $\hat{U}(t, t_0) = \prod_{n=1}^{N} e^{-i\hat{H}\Delta t/N}$

b) — 1 Punkt

Zeigen Sie, dass Sie die Zeitentwicklung in jedem Teilintervall nur bis zur Ordnung $1/N$ korrekt berechnen müssen, wenn Sie am Ende der Rechnung den Grenzfall $N \to \infty$ nehmen.

Hinweis: Für große z könnnen Sie $z! \approx \sqrt{2\pi z}\,(z/e)^z$ nutzen. Beachten Sie weiterhin, dass $(a+b)^c = \sum_{j=0}^{c} \binom{c}{j} a^{c-j} b^j$.

c) — 1 Punkt

Zeigen Sie, dass eine korrekte Form der Ortsdarstellung des Zeitentwicklungsoperators von freien, eindimensionalen Teilchen der Masse $m = 1$ in einem ortsabhängigen Potential $V(x)$ für einen infinitesimalen Zeitschritt $\epsilon > 0$ durch

$$U(x, t+\epsilon; y, t) = \langle x|\hat{U}(t+\epsilon, t)|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\epsilon}} e^{i(x-y)^2/(2\epsilon) - i\epsilon V(y)} \tag{1}$$

gegeben ist (in Einheiten in denen $\hbar = 1$). Dazu können Sie von der Zeitentwicklung

$$\Psi(x, t+\epsilon) = \langle x|\Psi(t+\epsilon)\rangle = \langle x|\hat{U}(t+\epsilon, t)|\Psi\rangle$$

ausgehen, welche die Wellenfunktion $\Psi(x, t+\epsilon)$ mit $\Psi(x, t)$ verbindet. Verwenden Sie dann $1 = \int dy\, |y\rangle\langle y|$ und Gleichung (1). Drücken Sie weiterhin alle Funktionen von y bis auf $e^{i(x-y)^2/(2\epsilon)}$ als Taylor-Reihen bezüglich x aus. Nach dem Ausführen der Integrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iaz^2/2}\, dz = \sqrt{\frac{1}{a}}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iaz^2/2} z^2\, dz = -2i \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\, e^{iaz^2/2}\, dz \tag{3}$$

(mit $a > 0$) können Sie durch die Identifikation des Hamilton-Operators belegen, dass Gleichung (1) in der Tat die korrekte Zeitentwicklung für einen infinitesimalen Zeitschritt liefert.

Hinweis: Beachten Sie während der Rechnung das Ergebnis von Teilaufgabe a).

d) **1 Punkt**

Prüfen Sie, ob es außer $\lambda = 0$ noch weitere Werte von λ gibt, für die

$$U_\lambda(x, t+\epsilon; y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\epsilon}} e^{i(x-y)^2/(2\epsilon) - i\epsilon(1-\lambda)V(y) - i\epsilon\lambda V(x)} \tag{4}$$

eine korrekte Form des Zeitentwicklungsoperators ist. Wie erklären Sie ihr Ergebnis?

2. Das Pfadintegral von Teilchen im Magnetfeld **3 Punkte**

Im Folgenden soll das Pfadintegral von freien Teilchen der Ladung e im Magnetfeld in drei Raumdimensionen bestimmt werden. Diese werden durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}(\hat{\vec{r}}))^2}{2m} \tag{5}$$

beschrieben.

a) **1 Punkt**

Bringen Sie $\hat{H}$ mithilfe der fundamentalen Vertauschungsregeln in normalgeordnete Form, sodass alle Impulsoperatoren links von Ortsoperatoren stehen.

b) **1 Punkt**

Zeigen Sie ausgehend von Aufgabenteil a), dass der Zeitentwicklungsoperator für einen infinitesimalen Zeitschritt ϵ durch

$$U(\vec{r}, t+\epsilon; \vec{r}\,', t) = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}}\right)^3 e^{im(\vec{r}-\vec{r}\,')^2/(2\epsilon)}\; e^{i\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}\,')\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\; e^{-\epsilon\,\frac{e}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}\,')/(2m)} \tag{6}$$

gegeben ist (mit $\hbar = 1$).

c) **1 Punkt**

Bei der Konstruktion des Pfadintegrals ist es nicht zwingend nötig, die Operatoren normal zu ordnen, wenn man ihr Nichtvertauschen konsequent berücksichtigt. Zeigen Sie durch geeignetes Aufspalten des Hamilton-Operators, dass die Zeitentwicklung alternativ auch durch den symmetrischeren Ausdruck

$$\widetilde{U}(\vec{r}, t+\epsilon; \vec{r}\,', t) = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}}\right)^3 e^{im(\vec{r}-\vec{r}\,')^2/(2\epsilon)}\; e^{i\frac{e}{c}\frac{\vec{A}(\vec{r})+\vec{A}(\vec{r}\,')}{2}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\; e^{-i\epsilon\,\frac{e^2}{c^2}(\vec{A}(\vec{r})-\vec{A}(\vec{r}\,'))^2/(8m)} \tag{7}$$

beschrieben werden kann.

3. Imaginärzeitpropagation **1 Punkt**

Berechnen Sie die Ortsdarstellung des Zeitentwicklungsoperators $\langle x|\hat{U}(\tau)|x'\rangle = \langle x|\exp(-\hat{H}\tau)|x'\rangle$ für einen beliebigen Hamiltonoperator mit Eigenzuständen $|n\rangle$ und Eigenenergien E_n (hierbei ist τ die Imaginärzeit). Bestimmen Sie aus dem Vergleich mit dem expliziten Ergebnis

$$\langle x|\hat{U}(\tau)|x'\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\sinh(\omega\tau)}}\exp\left\{-\frac{m\omega\left[(x^2+x'^2)\cosh(\omega\tau) - 2xx'\right]}{2\sinh(\omega\tau)}\right\}$$

die Energie und Wellenfunktion des Grundzustands des harmonischen Oszillators. Hierbei bezeichnen ω und m die Eigenfrequenz und Masse des Oszillators (mit $\hbar = 1$).