Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. M. Vojta
Dr. L. Janssen
T. Micallo

Theoretische Physik (Master)
3. Übung

Wintersemester 2020/21

1. Landau-Niveaus in der symmetrischen Eichung **3 Punkte**

Bestimmen Sie die Wellenfunktionen eines freien Elektrons im homogenen Magnetfeld in der symmetrischen Eichung $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)^\top$.

a) **1 Punkt**

Führen Sie hierzu die unabhängigen komplexen Koordinaten $z = x + iy$ und $z^* = x - iy$ ein. Was ist die explizite Form der Ableitungsoperatoren ∂_z und ∂_{z^*} als Funktion von Ableitungen bezüglich x und y? Begründen Sie, dass das Vektorpotential die Komponenten $A_z = (A_x - iA_y)/2$ und $A_{z^*} = (A_x + iA_y)/2$ hat.

b) **1 Punkt**

Betrachten Sie den Hamiltonoperator $\hat{H}$ nun in der symmetrischen Eichung und in den neuen Koordinaten z und z^*. Beschränken Sie sich zuerst auf den Fall $eB > 0$ (wobei e die Ladung eines Elektrons ist), und definieren Sie H' durch

$$\hat{H} = e^{-zz^*/(4l_B^2)}\, \hat{H}'\, e^{zz^*/(4l_B^2)},$$

wobei $l_B = \sqrt{c/|eB|}$ die magnetische Länge ist (mit $\hbar = 1$), $\omega_c = |eB|/mc$ die Zyklotronfrequenz bezeichnet, und m die Elektronenmasse ist. Zeigen Sie, dass $\hat{H}'$ in der Form $\hat{H}' = -\frac{4\partial_z - 2(e/c)Bz^*}{2m}\partial_{z^*} + \frac{\omega_c}{2}$ geschrieben werden kann. Was ändert sich für $eB < 0$?

Hinweis: Sie dürfen sich der Einfachheit halber auf den Sektor des Hilbertraums mit Impuls $\hat{p}_z = 0$ beschränken. (Warum?)

c) **1 Punkt**

Welche allgemeine Form haben die Wellenfunktionen der entarteten Zustände im niedrigsten Landau-Niveau? Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen einer Rechnung in der Landau-Eichung.

2. Gemittelte Zustandsdichte **1 Punkt**

Für die gemittelte Zustandsdichte eines Teilchens im Potential $V(\mathbf{r})$ (in 3D) haben Sie in der Vorlesung den Ausdruck $\bar{d}(E) = \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\mathbf{r}\, \sqrt{E - V(\mathbf{r})}$ kennengelernt, wobei sich die Ortsintegration nur über Orte mit $V(\mathbf{r}) < E$ erstreckt. Bestimmen Sie damit die mittlere Zustandsdichte im 3D-Kasten- und 3D-harmonischen Oszillator-Potential.

3. Feinstrukturaufspaltung in Natrium **2 Punkte**

Die Elektronenkonfiguration eines Natriumatoms im Grundzustand ist $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$. Legt man für die Beschreibung des Spektrums das Modell eines einzelnen Elektrons der Masse m in einem geeigneten Zentralfeld $V(\mathbf{r}) \equiv V(r)$ zugrunde (Valenzelektron in abgeschirmtem Coulombfeld), so lautet der Hamiltonian des Problems in der Ortsdarstellung

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \qquad \hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e} + V(r), \qquad \hat{H}_1 = -\frac{e}{2m_e^2c^2}\hat{\mathbf{S}} \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{p}}], \tag{1}$$

wobei $\hat{\mathbf{p}} \equiv -i\hbar\nabla$ der Impuls des Elektrons, $\hat{\mathbf{S}} \equiv \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ der Spin des Elektrons und $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ das elektrische Feld am Ort $\mathbf{r}$ des Elektrons bezeichnet.

a) **1 Punkt**

Zeigen Sie, dass die Störung in der Form $\hat{H}_1 = f(r)\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ mit einer skalaren Funktion $f(r)$ und dem Bahndrehimpuls $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}$ geschrieben werden kann. Dieser Term beschreibt somit die Kopplung des Elektronenspins an den Bahndrehimpuls.

b) **1 Punkt**

Bestimmen Sie die Feinstrukturaufspaltung der niedrigsten unbesetzten Energieniveaus des Natriumatoms aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung in niedrigster Ordnung Störungstheorie und erklären Sie damit die Aufspaltung der D-Linie im Spektrum von Natrium.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Erwartungswerte $\zeta(n, \ell) \equiv \frac{\hbar^2}{2m_e^2c^2}\langle n\ell m|[V'(r)/r]|n\ell m\rangle$ bekannt seien. Hierbei bezeichnet $|n\ell m\rangle$ die Eigenfunktionen von $\hat{H}_0$ und $V'(r) = \frac{dV(r)}{dr}$.