Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. M. Vojta
Dr. L. Janssen
T. Micallo

Theoretische Physik (Master)
4. Übung

Wintersemester 2020/21

1. Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsregel **3 Punkte**

a) **1 Punkt**

Bestimmen Sie in semiklassischer Näherung die energieabhängige Greensche Funktion als "Summe über alle klassischen Wege" für ein Teilchen in 1D mit dem Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$, wobei der Einfachheit halber $V(\hat{x})$ nur gebundene Zustände zulassen soll. Lesen Sie aus den Polen der Greenschen Funktion die Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsregel ab.

b) **1 Punkt**

Bestimmen Sie weiterhin die zugehörigen semiklassischen Wellenfunktionen. Nähern Sie hierzu die Wirkung für einen Umlauf,

$$W_0(E) = \int_{\text{Umlauf}} dx \sqrt{2m(E - V(x))}$$

für den Fall $E = E_n + \delta E$ mit $|\delta E/E| \ll 1$ und $W_0(E_n) = 2\pi\hbar(n + 1/2)$, und vergleichen Sie dann die Greensche Funktion mit dem allgemeinen Ausdruck $G_E(x, y) = \langle x|\hat{G}_E|y\rangle$ mit $(E - \hat{H})\hat{G}_E = 1$.

c) **1 Punkt**

Prüfen Sie, ob für ein Kastenpotential die "Summe über alle klassischen Wege" zum exakten Spektrum führt.

Hinweis: Nehmen Sie einen Phasensprung der Wellenfunktion in semiklassischer Näherung von π bei der Reflexion an der unendlich hohen Potentialwand an.

2. Greensche Funktion von gekoppelten Fermionen **3 Punkte**

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines Systems mit zwei gekoppelten fermionischen Zuständen A und B,

$$\hat{H} = \mathcal{E}_A\, c_A^\dagger c_A + \mathcal{E}_B\, c_B^\dagger c_B + V c_A^\dagger c_B + V^* c_B^\dagger c_A, \tag{1}$$

wobei c_i der Vernichtungsoperator des Zustands $i = A, B$ in zweiter Quantisierung ist und V die Hybridisierung der beiden Zustände A und B bezeichnet.

a) **1 Punkt**

Diagonalisieren Sie den Hamilton-Operator und drücken Sie die Eigenoperatoren c_α und c_β durch c_A und c_B aus.

b) **2 Punkte**

Berechnen Sie die retardierten Greensche Funktionen $G^r_{AA}(\omega)$ und $G^r_{BB}(\omega)$ der ursprünglichen Fermionen und interpretieren Sie deren Polstruktur. Hierbei bezeichnet $G^r_{ii}(\omega)$ die Fourier-Transformierte von $G^r_{ii}(t - t') = -i\theta(t - t')\,\langle[c_i(t), c_i^\dagger(t')]_+\rangle$.

3. Wechselwirkungsdarstellung **2 Punkte**

Beweisen Sie die Identiät

$$e^{-\beta \hat{H}} = e^{-\beta \hat{H}_0} \hat{T} \exp\left(- \int_0^\beta d\lambda \, \hat{H}_I(-i\lambda) \right), \tag{2}$$

wobei $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$ den vollständige Hamiltonoperator eines Systems bezeichnet, der in einen lösbaren Teil $\hat{H}_0$ und einen Störterm (Wechselwirkungsterm) $\hat{H}_I$ zerlegt werden kann. $\hat{T}$ bezeichnet den Zeitordnungsoperator (siehe unten).

a) **1 Punkt**

Leiten Sie zunächst die Bewegungsgleichung für den Operator

$$\hat{\hat{U}}(t) = e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H}t} \tag{3}$$

her, wobei $\hat{\hat{U}}(t=0) = 1$. Zeigen Sie, dass diese auf die Gleichung

$$\hat{\hat{U}}(t) = 1 - i \int_0^t dt_1 \, \hat{H}_I(t_1) \hat{\hat{U}}(t_1) \tag{4}$$

führt, wobei $\hat{H}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}_I e^{-i\hat{H}_0 t}$ die Zeitevolution von $H_I(t)$ im Wechselwirkungsbild bezeichnet.

Nebenbemerkung: Die S-Matrix hängt mit $\hat{\hat{U}}$ über $\hat{S}(t_0 + \epsilon, t_0) = \hat{\hat{U}}(t_0 + \epsilon) \hat{\hat{U}}^\dagger(t_0)$ für infinitesimale ϵ zusammen.

b) **1 Punkt**

Der Zeitordnungsoperator $\hat{T}$ ordnet ein Produkt von zeitabhängigen Operatoren $\hat{A}(t_i)$ in chronologischer Weise. Für $t_3 > t_4 > t_1 > t_2$ erhält man zum Beispiel

$$\hat{T}\left[\hat{A}(t_1)\hat{A}(t_3)\hat{A}(t_4)\hat{A}(t_2) \right] = \hat{A}(t_3)\hat{A}(t_4)\hat{A}(t_1)\hat{A}(t_2). \tag{5}$$

Nutzen Sie Gleichung (4), um $\hat{\hat{U}}(t)$ als

$$\hat{\hat{U}}(t) = \hat{T} \exp\left(-i \int_0^t dt' \, \hat{H}_I(t') \right) \tag{6}$$

zu schreiben. Beweisen Sie dann Gleichung (2).