Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. M. Vojta
Dr. L. Janssen
T. Micallo

Theoretische Physik (Master)
5. Übung

Wintersemester 2020/21

1. Isolierte and isotherme Suszeptibiltät **1 Punkt**

Bestimmen Sie die Antwort der z-Komponente eines freien Spin-1/2 auf ein Magnetfeld b entlang der z-Richtung im isolierten und isothermen Fall, indem Sie die isolierte Suszeptibilität $\chi_{AB}^{\text{is}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \chi_{AB}(t')$ und die isotherme Suszeptibilität χ_{AB}^T mit $A = S^z$ und $B = S^z$ berechnen. Stimmen die beiden Suzeptibilitäten überein? Erklären Sie das Ergebnis.

2. Bose-Einstein-Kondensation in Atomfallen **5 Punkte**

Diese Aufgabe behandelt die Bose-Einstein-Kondensation von Atomen in magneto-optischen Fallen, welche mit guter Genauigkeit ein asymmetrisches Oszillatorpotential

$$V(x, y, z) = \frac{m}{2}\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right) \tag{1}$$

erzeugen. Im Experiment kann die Temperatur T der Bosonen in der Falle geändert werden. Wenn die Falle mit einer gegebenen Zahl von Bosonen geladen ist, stellt sich das chemische Potential μ der Bosonen auf einen von der Temperatur abhängigen Wert ein.

a) **1 Punkt**

Berechnen Sie die Einteilchen-Eigenenergien eines sich in der Falle befindlichen Teilchens.

b) **1 Punkt**

Betrachten Sie nun den im Falle von Bose-Einstein-Kondensation makroskopisch besetzten Zustand. Wie sieht dessen Dichte- bzw. Impulsverteilung aus? Was ist das typische Volumen V, welches das Kondensat in diesem Zustand einnimmt? Gibt es qualitative Unterschiede im Vergleich zum uniformen Bose-Gas?

c) **1 Punkt**

Nehmen Sie nun an, dass sich eine feste Zahl von N Bosonen im Potential $V(x, y, z)$ befinden. Zeigen Sie ausgehend von der Bose-Einstein Verteilung, dass

$$N = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \sum_{n_x, n_y, n_z} e^{-j\beta \tilde{E}_{n_x,n_y,n_z}} = \frac{\tilde{z}}{1-\tilde{z}} + \sum_{j}^{\infty} \tilde{z}^j \sum_{n_x+n_y+n_z>0} e^{-j\beta \tilde{E}_{n_x,n_y,n_z}} \tag{2}$$

gilt, mit $\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$, der Fugazität $\tilde{z} = \exp\{\beta[\mu - \hbar(\omega_x + \omega_y + \omega_z)/2]\}$ und $\tilde{E}_{n_x,n_y,n_z} = E_{n_x,n_y,n_z} - \hbar(\omega_x + \omega_y + \omega_z)/2 + \mu$. Weiterhin bezeichnet $N_0 = \tilde{z}/(1 - \tilde{z})$ die Besetzungszahl des Einteilchenzustandes mit der niedrigsten Energie. Im Grenzfall hoher Temperatur, d.h. $k_\mathrm{B}T \gg \max\{\hbar\omega_x, \hbar\omega_y, \hbar\omega_z\}$, kann man die Summen über angeregte Zustände durch Integrale ersetzen. Werten Sie diese aus, um $\langle N - N_0\rangle$ als Funktion der Fugazität und der Temperatur zu finden. Zeigen Sie, dass $\langle N_0\rangle/\langle N\rangle = 1 - (T/T_\mathrm{c})^3$ und finden Sie T_c. Welchen Wert nimmt $\tilde{z}$ am Übergang an?

d) **1 Punkt**

Mittels der Zustandsdichte $\rho(E)$ lässt sich die Zahl der Bosonen in angeregten Zuständen allgemein schreiben als

$$\langle N - N_0 \rangle = V \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \int_0^{\infty} \mathrm{d}E\, \rho(E)\, e^{-j\beta E}. \tag{3}$$

Der Vergleich von Gl. (3) mit Gl. (2) liefert somit den formalen Ausdruck

$$\rho(E) = \frac{1}{V} \sum_{n_x, n_y, n_z > 0} \delta(E - \tilde{E}_{n_x, n_y, n_z})$$

für die Zustandsdichte einer dreidimensionalen Atomfalle. Benutzen Sie die Relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\Theta(E) = \delta(E)$ sowie die oben genannte Ersetzung der Summen durch Integrale, um $\rho(E)$ für ein harmonisches Potential in $d = 3, 2, 1$ Dimensionen zu bestimmen und berechnen Sie $\langle N - N_0 \rangle$ durch Einsetzen in Gl. (3). Wiederholen Sie dieses für den Fall eines uniformen Bose-Gases. Die Zustandsdichte des uniformen Bose-Gases ist gegeben durch

$$\rho_u(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int \mathrm{d}^D p\, \delta(E - \frac{p^2}{2m}). \tag{4}$$

Für welche Zahl von Raumdimensionen tritt Bose-Einstein-Kondensation des Bose-Gases in einer Atomfalle bzw. im uniformen Bose-Gas auf? Wie hängt jeweils T_c von der Teilchendichte ab? Begünstigt oder erschwert ein äußeres Potential das Auftreten von Bose-Einstein-Kondensation?

e) **1 Punkt**

In den experimentell realisierten Bose-Gasen in Atomfallen ist die Teilchenzahl üblicherweise im Bereich von $10^4 \ldots 10^6$ und damit so klein, dass erste Korrekturen zum thermodynamischen Limes eine Rolle spielen. Finden Sie die Korrektur zu $\langle N - N_0 \rangle$, indem Sie Gl. (2) in führender Ordnung im Hochtemperaturlimes auswerten.

Hinweis: Die Summe $\sum_{n_x, n_y, n_z}$ ist das Produkt dreier geometrischer Reihen. Diese können Sie nach der bekannten Formel summieren bevor Sie N_0 abziehen und die Hochtemperaturentwicklung vornehmen.