

Theoretische

Elektrodynamik

Matthias Vojta, TU Dresden

Vorlesung WS 2023/24

Einleitung

Gegenstand dieser Vorlesung ist die (klassische) Theorie der elektromagnetischen Felder. Ausgehend von den Maxwell-Gleichungen (1864)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 ; & \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 ; & \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j} \end{aligned} \quad (\text{Vakuum})$$

für die Felder \vec{E} , \vec{B} in Abhängigkeit von Ladungs- und Stromverteilung $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{j}(\vec{r}, t)$ sollen die physikalischen Erscheinungen abgeleitet werden.

Elektrodynamik ist ein Teil des Standard-Modells der Teilchenphysik, das elementare Teilchen und ihre Wechselwirkungen beschreibt.

Klassische Elektrodynamik ist ein Grenzfall der Quantenelektrodynamik

(gültig für kleine Impuls/Energieüberträge, große Besetzungszahlen von Photonen).

Viele interessante Aspekte von Materie können mit klassischer Theorie nicht gelöst werden, z.B. Warum sind Atome stabil ^{und stabil nicht}? Warum ist Eisen ferromagnetisch? Warum wird Blei unterhalb 7.2 K supraleitend? Hier sind Quanteneffekte wichtig (→ Theorie D, E). Hier werden wir uns auf die elektromagnetischen Aspekte der Theorie beschränken und Eigenschaften von Materie phänomenologisch einordnen.

* Klassische Elektrodynamik ist in Einklang mit der speziellen Relativitätstheorie (Lichtgeschwindigkeit als Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen).

Inhalt

0. Einleitung
1. Mathematische Hilfsmittel
2. Grundbegriffe und Maxwell-Gleichungen
3. Elektrostatik
4. Stationäre Ströme
5. Elektromagnetische Wellen
6. Energie- und Impulsbilanz des el. mag. Feldes
7. Kraftwirkungen auf Ladungen und Ströme
8. Felder zeitabhängiger Strom- und Ladungsverteilungen
9. Elektromagnetische Felder in Substanzen
10. Quasistationäre Ströme
11. Dispersion
12. Kovariante Formulierung der Elektrodynamik (& SRT)

Literatur

- J. D. Jackson, Klassische Elektrodynamik (Gruyter)
 Classical Electrodynamics (Wiley)
- W. Greiner, Klassische Elektrodynamik (H. Deutsch)
 (Bd 3)
- L. D. Landau, Elektrodynamik der Kontinua (Bd 8) (H. Deutsch)
 E. M. Lifshitz, Klassische Feldtheorie (Bd 2)
- T. Fießbach, Elektrodynamik (Spektrum)
- J. Honerkamp, Klassische Theoretische Physik (Kap 10-14) (Springer)
 H. Römer
- W. Nolting, Elektrodynamik
- R. Lenk, Theorie elektromagnetischer Felder
- D. J. Griffiths, Elektrodynamik (Pearson)

Historisches

Antike : u.a. Magnet Eisenstein (zieht Eisen an)

:

William Gilbert ~ 1600 : Erde ist Magnet
(Hofarzt von Elizabeth I.)
 \rightarrow Kompass!

:

Benjamin Franklin (1706-1790) : Erfinder des Blitzableiters,
Begriff der elektrischen Ladung

Charles Auguste de Coulomb (1736-1806) : $\vec{F} \sim \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$ (1784)

Alessandro Volta : Erste Batterie (~ 1800)

Hans Christian Oersted
Andre Marie Ampere
Michael Faraday
Georg Simon Ohm

1810 - 1830

James Clark Maxwell (1831-1879) : Maxwell-Gl 1864
(Felder haben eigene Existenz!)

Heinrich Hertz (1857-1894) : Entdeckung d. elmag Wellen 1887
Karlsruhe

Albert Einstein (1879-1955) : Zur Elektrodynamik bewegter Körper 1905
($\hat{=}$ SRT)

ab 1929 QED

1. Mathematische Hilfsmittel

(Lit: S. Großmann, Math. Einführungskurs f. d. Physik)

1.1. Skalar- und Vektorfelder

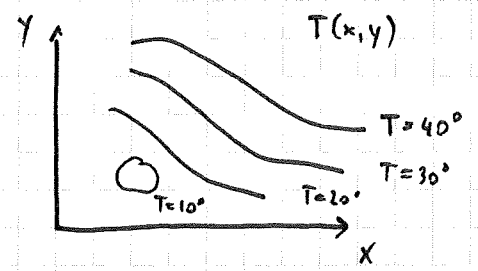
Die Objekte der Maxwell-Gleichungen sind Felder, d.h. Größen, die an jedem Raumpunkt $\vec{r} = (x, y, z)$ einen Wert haben (der zeitabhängig sein kann).

a) Skalare Felder

Jedem Raumpunkt wird eine (reelle) Zahl zugeordnet, d.h. das (reelle) Feld Φ ist $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$.

Bsp: Verteilungen von Temperatur, Druck, Ladung, Energie im Raum.

Bei der Darstellung kann man geometrische Orte mit $\Phi(\vec{r}) = \text{const}$ betrachten; in 2d sind dies Linien (z.B. Höhenlinien auf der Landkarte), in 3d Flächen (z.B. Äquipotentialflächen)



Isothermen (≙ „Höhenlinien“) in 2d

b) Vektorfelder

Jedem Raumpunkt wird ein Vektor $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$ zugeordnet.

Bsp: Geschwindigkeitsverteilung in einem strömenden Gas, Wärmestromdichte in strömendem Medium (Energie pro Zeit und Fläche in Richtung der Strömung), Lokale Geschwindigkeit eines Massenelements in einem rotierenden Körper ($\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$)

Vektorfelder lassen sich durch Feldlinien bzw. ausdrucksicheren Linien, anschaulich folgen die Feldlinien der lokalen Richtung des Feldes.

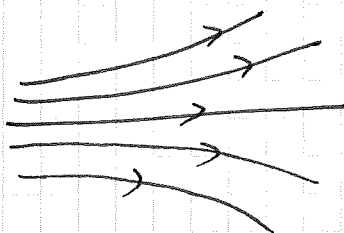
Feldlinien lassen sich durch Parameterdarstellung $\vec{r}(\tau, c)$ definieren ($\tau \hat{=}$ Kurvenparameter, c unterscheidet Feldlinien). Dann

- $\frac{d}{d\tau} \vec{r}(\tau, c) = \vec{E}(\vec{r}(\tau, c))$
- Durch jeden Punkt mit $\vec{E} \neq 0$ geht eine Feldlinie. (Ausnahmen $|\vec{E}|=0$ und $|\vec{E}| \rightarrow \infty$)

Damit liegen Feldlinien unendlich dicht. Deshalb ist folgende Konvention günstig:

- Die Dichte der Feldlinien (d.h. Zahl der Linien pro Flächeneinheit senkrecht zur Linie) ist proportional zur Feldstärke.

(Damit können Linien entstehen oder enden.)



1.2. Integrale auf Feldern

Integrale über skalare Felder werden wie bekannt gebildet; bei Integralen über Vektorfelder spielt die Richtungsinformation eine entscheidende Rolle. Man unterscheidet je nach Dimension des Integrationsgebietes Linien-, Flächen- und Volumenintegrale.

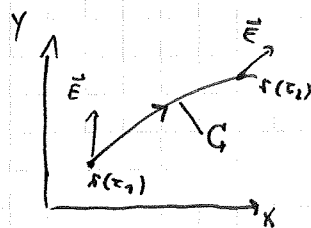
a) Linienintegral

$$\gamma = \int_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{E}(\vec{r}(\tau)) \frac{d\vec{r}}{d\tau} d\tau$$

(mit Richtung!)

Die Kurve C ist dabei in Parameterdarstellung

$\vec{r} = \vec{r}(\tau)$ gegeben. Spezialfall: geschlossene Kurve \curvearrowright



Ringintegral
(Zirkulation)

$$\Gamma = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Bsp Potentielle Energie einer Punktladung:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (\text{für konservative Kräfte})$$

$$= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}'$$

b) Flächenintegral

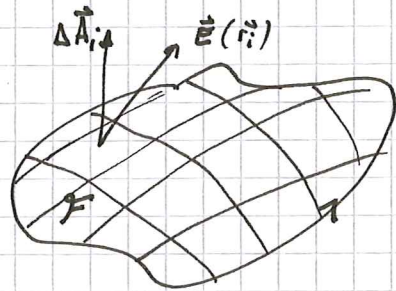
$$\phi = \iint_{\mathcal{F}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_{B(u,v)} \vec{E}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$$

ϕ heißt auch Fluss des Feldes \vec{E} durch die Fläche \mathcal{F} (und misst, wie viele Feldlinien von \vec{E} durch \mathcal{F} gehen), $d\vec{A}$ ist ein Flächenelement und zeigt in Richtung des lokalen Flächennormals von \mathcal{F} . (Die Richtung, von $d\vec{A}$ wird so ^{meist} gewählt, daß bei geschlossenen Flächen $d\vec{A}$ nach außen zeigt, bei Flächen mit orientierter Randkurve diese von der $d\vec{A}$ -Spitze aus gesehen im mathematisch positiven Drehsinn durchlaufen wird.) [Rechte Hand]

ϕ läßt sich schreiben als

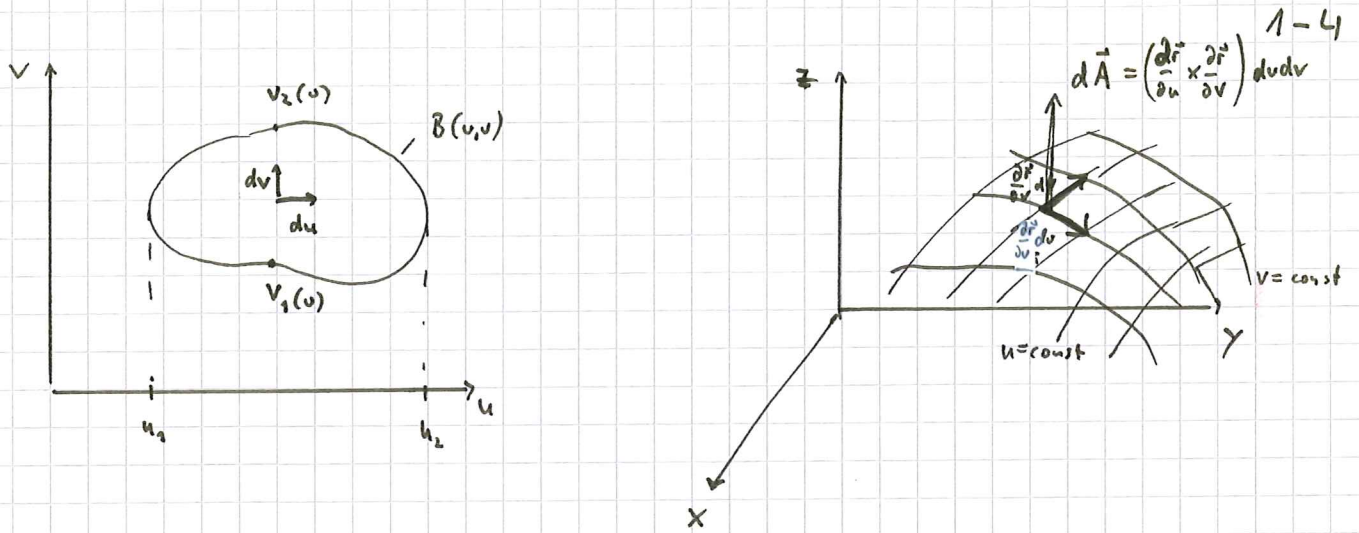
$$\phi = \lim_{N_i \rightarrow \infty} \sum_i \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{A}_i,$$

wobei das Limit einer Verfeinerung des Rasternetzes auf \mathcal{F} entspricht.



Zur Berechnung benutzt man wiederum eine Parameterdarstellung, $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, der Fläche \mathcal{F} . Eine begrenzte Fläche entspricht dabei einem Gebiet B in der $u-v$ -Ebene. Die Linien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ bilden i.a. ein krummliniges, schiefwinkliges Netz im \vec{r} -Raum. Der Inhalt eines Flächenelements ist

$$d\vec{A} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$$



Das u - v -Integral wird wie üblich als iteriertes Integral berechnet:

$$\iint_{B(u,v)} f(u,v) du dv = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} dv f(u,v)$$

u_1, u_2, v_1, v_2 folgen aus der Landkurve des Bereichs $B(u,v)$.

c) Volumenintegral eines skalaren Feldes

$$\iiint_V dV \Phi(\vec{r}) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \Phi(x,y,z)$$

Mit einer Parameterdarstellung von

V , $\vec{r} = \vec{r}(u,v,w)$ gilt:

$$\iiint_V dV \Phi(\vec{r}) = \iiint_{\tilde{V}} \Phi(\vec{r}(u,v,w)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) \right| du dv dw$$

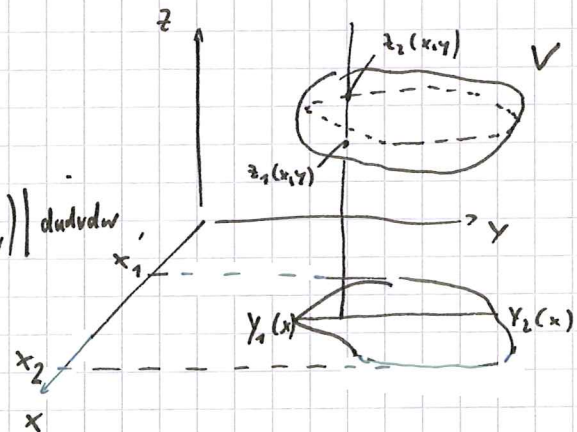
wobei \tilde{V} das Volumenelement im uvw -Raum

ist, das auf V abgebildet wird.

Das Skalarprodukt

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

heißt Funktionaldeterminante (oder Jacobi-Determinante).



1.3. Vektorielle Ableitungen und Integralsätze

a) Gradient - Richtungsableitung eines Skalarfeldes

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) =: \vec{\nabla} \varphi$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial r} = \nabla_{\vec{r}}$$

Nulla-Operator

grad φ ist ein Vektor (lokale Koord. Info).

grad φ beschreibt Änderung von φ entlang einer Richtung im Raum:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r} + \Delta \vec{r}) &= \varphi(\vec{r}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Delta z + \dots \\ &= \varphi(\vec{r}) + \Delta \vec{r} \cdot \text{grad } \varphi \end{aligned}$$

Ein Gradientenfeld $\vec{A} = \text{grad } \varphi$ hat die Eigenschaft

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0,$$

denn

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint \text{grad } \varphi \cdot d\vec{r} = \oint d\varphi = 0.$$

Umgekehrt: Falls $\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0$, dann ist \vec{A} als Gradientenfeld

darstellbar, $\vec{A} = \text{grad } \varphi$, mit

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (\vec{r}_0 \text{ beliebiges Bezugspunkt})$$

grad φ gibt Richtung der stärksten Änderung von φ an, d.h.

grad φ steht senkrecht auf Flächen mit $\varphi = \text{const.}$

Bsp

$$\text{grad } |\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\text{grad } \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

6) Divergenz - Quellstärke eines Vektorfeldes

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

$\operatorname{div} \vec{B}$ ist ein Skalar, d.h. invariant unter Koordinatentransformationen;

diese Eigenschaft ist eine des Skalarprodukts $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$.

div kann als lokale Quellstärke eines Vektorfeldes interpretiert werden.

Sei \vec{j} eine Stromdichte (von Teilchen mit Geschwindigkeit \vec{v} ; $\vec{j} = n \vec{v}$).

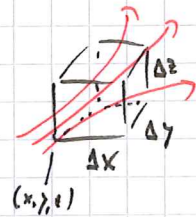
Die Anzahl der Teilchen, die aus einem

Volumenelement $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ herausströmen,

ist:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \Delta V} \vec{j} \cdot d\vec{A} &= \Delta y \Delta z (j_x(x+\Delta x, \bar{y}, \bar{z}) - j_x(x, \bar{y}, \bar{z})) \\ &\quad + \Delta x \Delta z (j_y(\bar{x}, y+\Delta y, \bar{z}) - j_y(\bar{x}, y, \bar{z})) \\ &\quad + \Delta x \Delta y (j_z(\bar{x}, \bar{y}, z+\Delta z) - j_z(\bar{x}, \bar{y}, z)) \\ &= \Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

(Strom oder Fluß durch Flächenelement $d\vec{A}$)



→ Aus Volumen ΔV fließt ein Teilchenstrom der Stärke $\Delta V \operatorname{div} \vec{j}$ heraus.

Häufig benötigt man $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = \Delta \varphi$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})$$

$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$
Laplace-Operator

Bsp: $\operatorname{div} \vec{r} = 3$

$$\operatorname{div} (\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

(Leichter: $\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{A}) = \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \varphi$)

c) Rotation - Wirbelstärke eines Vektorfeldes

$$\text{rot } \vec{B} = (\partial_y B_z - \partial_z B_y) \vec{e}_x + (\partial_z B_x - \partial_x B_z) \vec{e}_y + (\partial_x B_y - \partial_y B_x) \vec{e}_z = \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$\text{rot } \vec{B}$ ist ein Vektor (unter Koordinatentransformationen).

Man kann auch schreiben: $(\text{rot } \vec{B})_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_{x_j} B_k$ ($\epsilon =$ antisymmetrischer Tensor)

oder

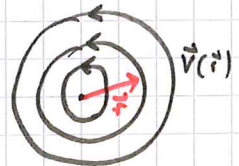
$$\text{rot } \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

rot kann als lokale Wirbelstärke eines Vektorfeldes interpretiert werden.

Betrachten wir konkret ein Strömungsfeld mit einem

Wirbel. Wenn $\vec{\omega} \parallel \vec{e}_z$ die Drehung charakterisiert

($\omega =$ Kreisfrequenz), dann ist $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



das Geschwindigkeitsfeld des Wirbels.

Hier ist $\text{rot } \vec{v} = \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{e}_x (\partial_y (\omega_x y - \omega_y x) - \partial_z (\omega_z x - \omega_x z)) + \dots$
 $= 2 \vec{\omega}$. ($\vec{\omega}$ charakterisiert Wirbelstärke)

$\text{rot } \vec{B}$ nennt man das Wirbelfeld von \vec{B} .

Wichtig: von \vec{r} !

(Achtung: Leicht mit \vec{v} - dort ist $\text{rot } \vec{B} \neq 0$ nur im Wirbel. Im Feld \vec{v} ist $\vec{v} = 0$!)

Bsp

$$\text{rot } \vec{r} = 0$$

$$\text{rot}(\varphi \vec{A}) = \varphi \text{rot } \vec{A} + (\text{grad } \varphi) \times \vec{A}$$

$$\text{rot}(\text{grad } \varphi) = 0$$

(φ zweimal stetig diff. bar)

$$\text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0$$

(\vec{A} -1-)

(Nachrechnen! Plausibel: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi : \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}$ dito.)

Umgekehrt: Wenn $\text{div } \vec{B} = 0$, dann ist \vec{B} als Wirbelfeld darstellbar, $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. In \vec{A} ist additives Gradientenfeld frei.

d) Gaußscher Satz

$$\int_V dV \operatorname{div} \vec{B} = \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{B} \quad \text{Gauß}$$

Verknüpft Eigenschaften von \vec{B} im Inneren von V mit denen auf der Oberfläche ∂V .

Beweis: durch Zerlegen in Teilvolumina. Siehe b), dort für Quader:

$$\oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{B} = \Delta V \cdot \operatorname{div} \vec{B}$$

Setzt man $\vec{B} = \vec{a} \varphi(\vec{r})$, erhält man den Gaußschen Satz für skalare Felder

$$\int_V dV \operatorname{grad} \varphi = \oint_{\partial V} d\vec{A} \varphi$$

oder

$$\int_V dV \vec{\nabla} \dots = \oint_{\partial V} d\vec{A} \dots$$

← $\vec{B} = \vec{a} \times \vec{c}(\vec{r})$ gilt
 $\int_V dV \operatorname{rot} \vec{c} = \oint_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{c}$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes kann man in drei Dimensionen partiell integrieren: $\int dV \psi \operatorname{grad} \varphi = ?$

$$\begin{aligned} \int_V dV \psi \operatorname{grad} \varphi &= \int_V dV [\operatorname{grad}(\psi \varphi) - \varphi \operatorname{grad} \psi] \\ &= \oint_{\partial V} d\vec{A} \psi \varphi - \int_V dV \varphi \operatorname{grad} \psi \end{aligned}$$

(!) Falls die Randwerte Null sind (z.B. φ oder ψ Null auf ∂V), dann

folgt:

$$\int_V dV \psi \operatorname{grad} \varphi = - \int_V dV \varphi \operatorname{grad} \psi$$

Partielle Integration von $\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi$ führt auf:

$$\int_V dV (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \oint_{\partial V} d\vec{A} (\varphi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \varphi)$$

Green'scher Satz

e) Stokesscher Satz

$$\boxed{\iint_A d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} = \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{B}} \quad \text{Stokes}$$

Beweis: durch Zerlegen in Teilflächen. Für ^{ein} flaches Flächenelement $\Delta \vec{A}$ gilt:

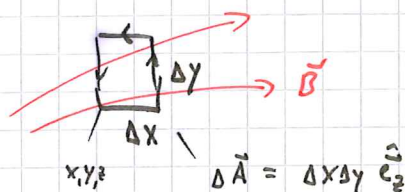
$$\oint_{\partial \Delta A} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \Delta \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}, \quad \text{denn}$$

$$\oint_{\partial \Delta A} d\vec{r} \cdot \vec{B} = B_x(\bar{x}, y, z) \Delta x + B_y(x+\Delta x, \bar{y}, z) \Delta y$$

$$\uparrow \text{Mittelwertsatz} \quad - B_x(\bar{x}, y+\Delta y, z) \Delta x - B_y(x, \bar{y}, z) \Delta y$$

$$= -\Delta x \Delta y \frac{\partial B_x}{\partial y} + \Delta y \Delta x \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$$= \Delta x \Delta y (\text{rot } \vec{B})_z = \Delta \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} //$$



Wenn man Stokes auf geschlossene Fläche anwendet, folgt $\oiint d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} = 0$.

Setzt man $\vec{B} = \vec{a} \varphi(\vec{r})$, erhält man

$$\underline{\iint_A d\vec{A} \times \text{grad } \varphi = \oint_{\partial A} d\vec{r} \varphi}$$

Analog ergibt sich mit $\vec{B} = \vec{a} \times \vec{c}(\vec{r})$

$$\underline{\iint_A (d\vec{A} \times \vec{v}) \times \vec{c} = \oint_{\partial A} d\vec{r} \times \vec{c}}$$

oder allg.

$$\iint_A (d\vec{A} \times \vec{v}) \dots = \oint_{\partial A} d\vec{r} \dots$$

1.4. Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Kartesische / Kugel- / zylindrische Koordinaten wichtig.

Wh. siehe Gropmann-Buch.

Achtung z.B.

$$\vec{\nabla} \psi = \partial_x \psi \hat{e}_x + \partial_y \psi \hat{e}_y + \partial_z \psi \hat{e}_z \quad \text{Kartesisch}$$

$$\vec{\nabla} \psi = \partial_r \psi \hat{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \psi \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \psi \hat{e}_\varphi \quad \text{Kugelh. usw.}$$

Generell:

$$\Delta \psi =: \text{grad } \psi \cdot \Delta \vec{r} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ludwigs} \\ \text{Delta, nicht Laplace} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \psi)_u &= \vec{\nabla} \psi \cdot \hat{e}_u = \frac{1}{g_u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ &= \left(= \frac{1}{g_u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \vec{\nabla} \psi \right) \end{aligned} \quad , \quad g_u = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|$$

$$\text{div } \vec{B} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial \Delta V} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$(\text{rot } \vec{B})_{\vec{n}} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_{\partial \Delta A} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

↑
Flächennormale von ΔA

1.5. Fourier - Transformation (kurz)

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{+i\omega t} \tilde{f}(\omega)$$

Mehrere Dimensionen

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int d^d r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{r})$$

Differentiation:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \underline{i\omega} \tilde{f}(\omega)$$

Faltung:

$$(f * g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds f(t-s) g(s)$$

Dann $\tilde{f * g}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega)$

Rechenregeln:

$$(f(t) \leftrightarrow \tilde{f}(\omega))$$

$$f'(t) \leftrightarrow i\omega \tilde{f}(\omega)$$

$$-it f(t) \leftrightarrow \tilde{f}'(\omega)$$

$$f(t+a) \leftrightarrow e^{i\omega a} \tilde{f}(\omega)$$

$$e^{iat} f(t) \leftrightarrow \tilde{f}(\omega - a)$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$f^*(t) \leftrightarrow \tilde{f}^*(-\omega)$$

$$\tilde{\tilde{f}}(t) \leftrightarrow f(-t)$$