2. Grundbegriffe und Maxwell-Gleichungen

2.1. Kräfte auf Punktladungen

Ruhende Ladung
$$\vec{F}(\vec{r},t) \overset{\text{Erfahrung}}{=} \underbrace{Q}_{\text{Körper-eigenschaft}} \; \underbrace{\vec{E}(\vec{r},t)}_{\text{Elektr. Feld unabh. vom Körper}}$$

Vergleich der Kraft auf 2 Körper: $\vec{F}_1(\vec{r},t) = Q_1/Q_2 \; \vec{F}_2(\vec{r},t)$

Damit ist Bezugsladung (d.h. Ladungseinheit) noch frei,

zB. kann man umdefinieren $\tilde{Q} = \gamma Q$, $\tilde{\vec{E}} = 1/\gamma \, \vec{E}$, $\tilde{Q}_1/\tilde{Q}_2 = Q_1/Q_2$.

(Einheitenfestlegung später)

Bewegte Ladung
$$\vec{F}(\vec{r},t) \overset{\text{Erfahrung}}{=} Q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Dies definiert $\vec{B}$!

2.2. Ladungs- und Stromdichte; Ladungserhaltung

Ladung im Volumenelement dV: $\quad dQ = \rho(\vec{r},t)\, dV$

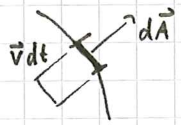
$\curvearrowright$ Ladungsdichte
$$\rho(\vec{r},t) = \frac{dQ}{dV}$$

Ladungsänderung in V:
(V fest)
$$\dot{Q} = \frac{d}{dt}\int_V dV\, \rho(\vec{r},t) = \int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Erfahrung: Ladung erhalten, d.h. Ladungsänderung durch Strom in/aus V.

$$\dot{Q} = -I$$
(I nach außen sei positiv)

Stromfluß durch Oberflächenelement $d\vec{A}$ in Zeitintervall dt:



$$dQ = \rho(\vec{r},t)\;\vec{v}(\vec{r},t)\;dt\;d\vec{A}$$

↑ Geschwindigkeitsfeld

$$\rightsquigarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \rho\,\vec{v}\,d\vec{A} =: \vec{j}(\vec{r},t)\cdot d\vec{A}$$

$\rightsquigarrow$ Stromdichte $\quad \vec{j} = \rho\,\vec{v} \quad$ (Mehrere Ladungssorten $\vec{j} = \sum_n \rho_n \vec{v}_n$)

Stromdichte ist Strom/Fläche, also $I = \iint \vec{j}\cdot d\vec{A}$),

für geschlossenes Volumen $I = \oint\!\!\oint \vec{j}\,d\vec{A}$

$\rightsquigarrow$ Einsetzen in Ladungserhaltung

$$0 = \dot{Q} + I = \iiint dV\,\frac{\partial\rho}{\partial t} + \oint\!\!\oint \vec{j}\,d\vec{A}$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \iiint dV \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\vec{j}}{\partial\vec{r}}\right) \overset{!}{=} 0 \quad (\text{für alle } V)$$

$\rightsquigarrow$ Kontinuitätsgleichung $\quad \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\vec{j}}{\partial\vec{r}} = 0} \quad (\dot{\rho} + \operatorname{div}\vec{j} = 0)$

Für (unendlich) großes Volumen:

$\vec{j} \to 0$ auf Oberfläche $\rightsquigarrow \dot{Q} = -\oint\!\!\oint \vec{j}\,d\vec{A} = 0 \rightsquigarrow Q = \text{const}$

Lorentz-Kraftdichte: $\vec{f} = d\vec{F}/dV$

$$d\vec{F} = dQ\,(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$$\vec{f} = \rho(\vec{r},t)\left(E(\vec{r},t) + \vec{v}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right) = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}$$

(Mehrere Ladungssorten: $\vec{f} = \sum_n \rho_n\,(\vec{E} + \vec{v}_n\times\vec{B})$)

2.3. Die Maxwell-Gleichungen

bis jetzt: $\vec{E}, \vec{B} \longrightarrow \vec{f}$

nun: $\rho, \vec{j} \longrightarrow \vec{E}, \vec{B}$

$$\begin{tikzcd} & \vec{E}, \vec{B} \arrow[dr, "\text{Lorentz}"] & \\ \rho, \vec{j} \arrow[ur, "\text{Maxwell}"] & & \vec{f} \arrow[ll, "\text{Newton}"] \end{tikzcd}$$

Frage: Braucht man $\vec{E}$ & $\vec{B}$ wirklich, oder könnte man die Felder eliminieren?
(„Fernwirkungstheorie")

Antwort: Eliminieren wäre unzweckmäßig.
- $\vec{E}$ & $\vec{B}$ können selbständig im Vak. existieren (Wellen)
- lokale Theorien sind einfacher

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} &= 0, & \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} &= \vec{j} \end{aligned}}$$

Quellen und Wirbel von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch ρ und $\vec{j}$ bestimmt.

(Gleichungen gelten für makroskopische Felder im Vakuum, mikroskopisch allgemein ohne Einschränkung!)

Die Maxwell-Gl. beinhalten die Kontinuitätsgl $\rightsquigarrow$ Übung!

2.4. Konstruktion der Maxwell-Gleichungen aus Symmetrieforderungen

Symmetrien:
$\vec{r} \longrightarrow -\vec{r}$ Rauminversion
$t \longrightarrow -t$ Reversibilität
} keine Änderung der physikalischen Gesetze

Ziel: möglichste einfache Gesetze $\rightsquigarrow$ lineare Gln, Dgln 1. Ordnung

Symmetrietransformation sollte Form der Gleichungen invariant lassen, d.h.

$A \longrightarrow A'$, $B \longrightarrow B'$: $\quad A = B \longrightarrow A' = B'$ (z.B. bei Drehung von Vektoren)

	$t \to -t$	$\vec{r} \to -\vec{r}$	
t, $\partial/\partial t$	$-$	$+$	Def
$\vec{r}$, $\partial/\partial\vec{r}$	$+$	$-$	Def
$\dot{\vec{r}}$	$-$	$-$	
$\ddot{\vec{r}}$, $\vec{F}$, $\vec{p}$	$+$	$-$	Erfahrung aus Mechanik $\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$
Q, ρ	$+$	$+$	Annahme
$\vec{j} = \rho\vec{v}$	$-$	$-$	
$\vec{E}$	$+$	$-$	Vektor; $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$
$\vec{B}$	$-$	$+$	Pseudovektor
$\partial\vec{E}/\partial\vec{r}$	$+$	$+$	Skalar
$\partial\vec{B}/\partial\vec{r}$	$-$	$-$	Pseudoskalar
$\partial/\partial\vec{r} \times \vec{E}$	$+$	$+$	Pseudovektor
$\partial/\partial\vec{r} \times \vec{B}$	$-$	$-$	Vektor
$\dot{\vec{E}}$	$-$	$-$	Vektor
$\dot{\vec{B}}$	$+$	$+$	Pseudovektor

Aus der Invarianzforderung der Gleichungen folgt, daß nur Größen mit gleichem Transformationsverhalten verknüpft werden können.

1) $+\ +$ Skalar ρ, $\mathrm{div}\,\vec{E}$
2) $-\ -$ Vektor $\vec{j}$, $\mathrm{rot}\,\vec{B}$, $\dot{\vec{E}}$ ($\dot{\vec{r}}$ – steckt schon in $\vec{j}$)
3) $-\ -$ Skalar $\mathrm{div}\,\vec{B}$
4) $+\ +$ Vektor $\mathrm{rot}\,\vec{E}$, $\dot{\vec{B}}$
5) $+\ -$ Vektor $\vec{E}$ ($\vec{r}$, $\ddot{\vec{r}}$) ($\vec{r}$ sollte nicht vorkommen, da Raum homogen)
6) $-\ +$ Vektor $\vec{B}$

1) $\rho = \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\vec{E}$ 2) $\vec{j} = \alpha\dot{\vec{E}} + \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\vec{B}$

3) $0 = \mathrm{div}\,\vec{B}$ 4) $0 = \mathrm{rot}\,\vec{E} + \beta\dot{\vec{B}}$

5) $\cancel{\vec{E} = 0}$ 6) $\cancel{\vec{B} = 0}$

Das System 1) – 4) ist vollständig, da $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch Quellen und Wirbel bis auf Konstante bestimmt sind.

Es ist widerspruchsfrei (zu zeigen), z.B. (3),(4): $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{E} + \beta\, \partial/\partial t \operatorname{div}\vec{B} = 0 + 0$ //.

Konstantendiskussion:

I. ε_0 frei wählbar, da α nur bis auf Faktor bestimmt ist.

z.B. $\varepsilon_0 = 1$ cgs – Maßsystem

$4\pi\varepsilon_0 = 1$ Gaußsches Maßsystem

Im SI – System wird dagegen μ_0 festgelegt.

$$[\mu_0] = \frac{[\vec{B}]}{[\vec{I}]}\frac{[e]^2}{[e]} \underset{\vec{f}=\vec{j}\times\vec{B}}{=} \frac{[\vec{f}]\,[e]}{[\vec{j}]\,[\vec{I}]} = \frac{[F]}{[I]^2} = \frac{N}{A^2};$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ N/A^2 \qquad \text{(Zahl willkürlich)}$$

II. α aus Ladungserhaltung $\dot{\rho} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$

Einsetzen: $(\varepsilon_0 + \alpha)\ \partial/\partial t \operatorname{div}\vec{E} \overset{!}{=} 0 \curvearrowright \alpha = -\varepsilon_0$

III. $$[\varepsilon_0\mu_0] = \frac{[B]\,[t]}{[e]\,[E]} = \frac{1}{[v]^2}$$

$\curvearrowright$ Fundamentale Geschwindigkeit $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$

IV. $\beta = 1$ (S.I.) ergibt sich aus der Invarianz der Maxwell-Gl von Inertialsystem zu Inertialsystem (s.u.)

NB. Gauß hat Lorentz-Kraft $\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}$ (!), dann $\varepsilon_0\mu_0\beta = \frac{1}{c^2}$ und $\beta = 1/c$, $\mu_0 = \frac{4\pi}{c}$

2-5b

Table 2 Definitions of ϵ_0, μ_0, **D**, **H**, Macroscopic Maxwell Equations, and Lorentz Force Equation in Various Systems of Units

Where necessary the dimensions of quantities are given in parentheses. The symbol c stands for the velocity of light in vacuum with dimensions (lt^{-1}).

System	ϵ_0	μ_0	D, H	Macroscopic Maxwell Equations				Lorentz Force per Unit Charge
Electrostatic (esu)	1	c^{-2} (t^2l^{-2})	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = c^2\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\nabla\times\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}$
Electromagnetic (emu)	c^{-2} (t^2l^{-2})	1	$\mathbf{D} = \frac{1}{c^2}\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\nabla\times\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}$
Gaussian	1	1	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}$
Heaviside–Lorentz	1	1	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$	$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{1}{c}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)$	$\nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}$
SI	$\frac{10^7}{4\pi c^2}$ $(I^2t^4m^{-1}l^{-3})$	$4\pi\times 10^{-7}$ $(mlI^{-2}t^{-2})$	$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$	$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}$

nicht konsistent mit Vorl. – Konstanten ...

2-5c

in the five common systems of units of Table 1. For each system of units the continuity equation for charge and current is given by (A.1), as can be verified from the first pair of the Maxwell equations in the table in each case.* Similarly, in all systems the statement of Ohm's law is $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, where σ is the conductivity.

4 *Conversion of Equations and Amounts Between SI Units and Gaussian Units*

The two systems of electromagnetic units in most common use today are the SI and Gaussian systems. The SI system has the virtue of overall convenience in

Table 3 Conversion Table for Symbols and Formulas

The symbols for mass, length, time, force, and other not specifically electromagnetic quantities are unchanged. To convert any equation in SI variables to the corresponding equation in Gaussian quantities, on both sides of the equation replace the relevant symbols listed below under "SI" by the corresponding "Gaussian" symbols listed on the left. The reverse transformation is also allowed. Residual powers of $\mu_0\epsilon_0$ should be eliminated in favor of the speed of light ($c^2\mu_0\epsilon_0 = 1$). Since the length and time symbols are unchanged, quantities that differ dimensionally from one another only by powers of length and/or time are grouped together where possible.

Quantity	Gaussian	SI
Velocity of light	c	$(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$
Electric field (potential, voltage)	$\mathbf{E}(\Phi, V)/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$	$\mathbf{E}(\Phi, V)$
Displacement	$\sqrt{\epsilon_0/4\pi}\,\mathbf{D}$	$\mathbf{D}$
Charge density (charge, current density, current, polarization)	$\sqrt{4\pi\epsilon_0}\,\rho(q, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$	$\rho(q, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$
Magnetic induction	$\sqrt{\mu_0/4\pi}\,\mathbf{B}$	$\mathbf{B}$
Magnetic field	$\mathbf{H}/\sqrt{4\pi\mu_0}$	$\mathbf{H}$
Magnetization	$\sqrt{4\pi/\mu_0}\,\mathbf{M}$	$\mathbf{M}$
Conductivity	$4\pi\epsilon_0\sigma$	σ
Dielectric constant	$\epsilon_0\epsilon$	ϵ
Magnetic permeability	$\mu_0\mu$	μ
Resistance (impedance)	$R(Z)/4\pi\epsilon_0$	$R(Z)$
Inductance	$L/4\pi\epsilon_0$	L
Capacitance	$4\pi\epsilon_0 C$	C

$$c = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}$$
$$\epsilon_0 = 8.854\,187\,8 \ldots \times 10^{-12} \text{ F/m}$$
$$\mu_0 = 1.256\,637\,0 \ldots \times 10^{-6} \text{ H/m} = \frac{N}{A^2}$$
$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.730\,3 \ldots \Omega$$

Farad = [C] [P/V] = C/V = $\frac{U_m}{V^2}$

$\frac{N}{V^2}$

*Some workers employ a modified Gaussian system of units in which current is defined by $I = (1/c)(dq/dt)$. Then the current density $\mathbf{J}$ in Table 2 must be replaced by $c\mathbf{J}$, and the continuity equation is $\nabla \cdot \mathbf{J} + (1/c)(\partial\rho/\partial t) = 0$. See also the footnote to Table 4.

$F = QE$

$N = C \cdot \frac{V}{m}$

2-5d

Table 4 Conversion Table for Given Amounts of a Physical Quantity

The table is arranged so that a given amount of some physical quantity, expressed as so many SI or Gaussian units of that quantity, can be expressed as an equivalent number of units in the other system. Thus the entries in each row stand for the same amount, expressed in different units. All factors of 3 (apart from exponents) should, for accurate work, be replaced by (2.997 924 58), arising from the numerical value of the velocity of light. For example, in the row for displacement (D), the entry ($12\pi \times 10^5$) is actually ($2.997\,924\,58 \times 4\pi \times 10^5$) and "9" is actually $10^{-16} c^2 = 8.987\,55\ldots$. Where a name for a unit has been agreed on or is in common usage, that name is given. Otherwise, one merely reads so many Gaussian units, or SI units.

Physical Quantity	Symbol	SI		Gaussian
Length	l	1 meter (m)	10^2	centimeters (cm)
Mass	m	1 kilogram (kg)	10^3	grams (g)
Time	t	1 second (s)	1	second (s)
Frequency	ν	1 hertz (Hz)	1	hertz (Hz)
Force	F	1 newton (N)	10^5	dynes
Work Energy	$\left.\begin{matrix} W \\ U \end{matrix}\right\}$	1 joule (J)	10^7	ergs
Power	P	1 watt (W)	10^7	ergs s^{-1}
Charge	q	1 coulomb (C)	3×10^9	statcoulombs
Charge density	ρ	1 C m^{-3}	3×10^3	statcoul cm^{-3}
Current	I	1 ampere (A)	3×10^9	statamperes
Current density	J	1 A m^{-2}	3×10^5	statamp cm^{-2}
Electric field	E	1 volt m^{-1} (Vm^{-1})	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$	statvolt cm^{-1}
Potential	Φ, V	1 volt (V)	$\frac{1}{300}$	statvolt
Polarization	P	1 C m^{-2}	3×10^5	dipole moment cm^{-3}
Displacement	D	1 C m^{-2}	$12\pi \times 10^5$	statvolt cm^{-1} (statcoul cm^{-2})
Conductivity	σ	1 siemens m^{-1}	9×10^9	s^{-1}
Resistance	R	1 ohm (Ω)	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	s cm^{-1}
Capacitance	C	1 farad (F)	9×10^{11}	cm
Magnetic flux	ϕ, F	1 weber (Wb)	10^8	gauss cm^2 or maxwells
Magnetic induction	B	1 tesla (T)	10^4	gauss (G)
Magnetic field	H	1 A m^{-1}	$4\pi \times 10^{-3}$	oersted (Oe)
Magnetization	M	1 A m^{-1}	10^{-3}	magnetic moment cm^{-3}
Inductance*	L	1 henry (H)	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	

*There is some confusion about the unit of inductance in Gaussian units. This stems from the use by some authors of a modified system of Gaussian units in which current is measured in electromagnetic units, so that the connection between charge and current is $I_m = (1/c)(dq/dt)$. Since inductance is defined through the induced voltage $V = L(dI/dt)$ or the energy $U = \frac{1}{2}LI^2$, the choice of current defined in Section 2 means that our Gaussian unit of inductance is equal in magnitude and dimensions ($t^2 l^{-1}$) to the electrostatic unit of inductance. The electromagnetic current I_m is related to our Gaussian current I by the relation $I_m = (1/c)I$. From the energy definition of inductance, we see that the electromagnetic inductance L_m is related to our Gaussian inductance L through $L_m = c^2 L$. Thus L_m has the dimensions of length. The modified Gaussian system generally uses the electromagnetic unit of inductance, as well as current. Then the voltage relation reads $V = (L_m/c)(dI_m/dt)$. The numerical connection between units of inductance is

$$1 \text{ henry} = \tfrac{1}{9} \times 10^{-11} \text{ Gaussian (es) unit} = 10^9 \text{ emu}$$

2.5. Die integrale Formulierung der Maxwell-Gleichungen

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad \curvearrowright \quad \varepsilon_0 \int_V dV \operatorname{div} \vec{E} = \int_V dV \rho \quad \overset{\text{Gauß}}{\curvearrowright} \quad \underline{\varepsilon_0 \oiint d\vec{A} \cdot \vec{E} = Q_{in}}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \curvearrowright \quad \underline{\oiint d\vec{A} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \quad \overset{\text{Stokes}}{\curvearrowright} \quad \underline{\oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{E} + \iint_A d\vec{A} \cdot \dot{\vec{B}} = 0}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} = \vec{j} \quad \curvearrowright \quad \underline{\frac{1}{\mu} \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{B} - \varepsilon_0 \iint_A d\vec{A} \cdot \dot{\vec{E}} = I_{in}}$$

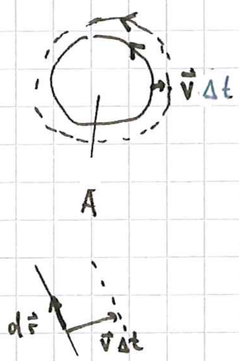
(Orientierung der Randkurve gemäß rechter Hand)

Bem.: $\vec{r}$ und t sind in der Edyn (wie in jeder Feldtheorie) unabhängige Variable $\curvearrowright$ Felder hängen von $\vec{r}$ und t ab (nicht von $\dot{\vec{r}}$ – das gibt es nicht!).
Eine explizite Abh. der Grund-Gleichungen von $\vec{r}$ und t kann nicht existieren, da dann Raum- oder Zeitpunkt ausgezeichnet wäre.

2.6. Induktionsgesetz für Leiterschleifen

Magnetischer Fluß durch eine Fläche $\vec{A}$ im Raum $\quad \underline{\phi = \iint_A d\vec{A} \cdot \vec{B}}$

Änderung des Flusses durch
- Änderung von $\vec{B}$
- Änderung der Fläche



$\vec{v}(\vec{r},t)$ ... Verschiebung der Randkurvenpunkte

$$\Delta\phi = \Delta \iint d\vec{A} \cdot \vec{B} = \iint_A d\vec{A} \cdot \Delta\vec{B} + \iint_{\Delta A} d\vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$= \Delta t \iint_A d\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \oint_{\partial A} (\vec{v}\Delta t \times d\vec{r})\, \vec{B}$$

$$= \Delta t \left(\iint_A d\vec{A} \cdot \dot{\vec{B}} - \oint d\vec{r}\, (\vec{v} \times \vec{B}) \right)$$

$$\dot{\Phi} = \iint d\vec{A}\cdot\dot{\vec{B}} - \oint d\vec{r}\,(\vec{v}\times\vec{B})$$

Maxwell ↷ $$-\dot{\Phi} = \oint_{\partial A} d\vec{r}\,(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$$ „Induktionsgesetz"

Materialisierte Leiterschleife:

Lenzsche Regel

$$\boxed{U_{ind} = \oint d\vec{r}\,(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) = -\dot{\Phi}}$$

Begründung:

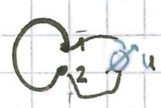
$$\vec{F}_{\text{auf Ladung}} = Q\,(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) = Q\,\vec{E}'$$

↑ Laborsystem ↑ Mitbewegtes Bezugssystem mit $\vec{v}'=0$

$$\vec{E}' = \vec{E}+\vec{v}\times\vec{B} \qquad (\vec{E}\text{ abh. von BZ})$$

$$\left(\text{Ohmsches Gesetz: } \vec{j}' = \sigma\cdot\vec{E}'\right)$$

→ Offene Schleife:



$$\oint d\vec{r}\,(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) = \oint d\vec{r}\cdot\vec{E}' = \int_1^2 d\vec{r}\,\vec{E}' = U_{ind}$$

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{r}$ heißt auch „elektromotorische Kraft" — kleine Lücke

→ Geschlossene Schleife:

$$I = \iint_{\text{Querschnitt}} d\vec{A}\cdot\vec{j} = \iint d\vec{A}\cdot\vec{j}_{\text{tangential}} \underset{\text{Ohm}}{=} \iint d\vec{A}\,\sigma\,\vec{E}'_{tang}.$$

$$\underset{\text{dünner Leiter}}{=} A\,\sigma\,E'_{tang}\ ; \qquad I = \text{const, homogen} \curvearrowright E'_{tang} = I/A\sigma$$

$$\curvearrowright \oint d\vec{r}\cdot\vec{E}' = I\oint\frac{dl}{A\sigma} = I\cdot R = U_{ind}$$

Richtung des induzierten Stroms: wirkt Ursache entgegen! (Lenz)

$\vec{B}\ \odot$; $\dot{\Phi} < 0$ bewirkt $U_{ind} > 0$ und Strom ↺. Der erzeugt Feld $\odot$.