

3. Elektrostatik

3.1. Grundgleichungen - Elektostatisches Potential

Maxwell: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ $\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho$
 $\operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$ $\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \vec{j}$

Statisch $\hat{=}$ keine zeitabhängigkeit $\leadsto \dot{\vec{E}} = 0, \dot{\vec{B}} = 0$
 \leadsto Entkopplung von Elektrizität und Magnetismus

↳ Elektrostatik (Kap 3)
 stationäre Ströme (Kap 4)

Ruhende Ladungen $\leadsto \vec{j} = 0 \leadsto \vec{B} = 0$

Damit $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, Einführen eines Potentials φ mit $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$
 Gradientenfelder sind wirbelfrei. bzw. $\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

$\leadsto \Delta \varphi = -\rho / \epsilon_0$ Poisson-Gleichung der Elektrostatik

3.2. Kugelsymmetrische Ladungsverteilung

$\rho(\vec{r}) = \rho(\underbrace{|\vec{r}|}_{=r}) \leadsto \varphi(\vec{r}) = \varphi(r)$, Äquipotentialflächen sind Kugeln
 $\leadsto \operatorname{grad} \varphi \parallel \vec{r}$

$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = E(r) \hat{e}_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{e}_r$

$\epsilon_0 \iint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E} = Q_{in}$, Kugelgeometrie: $4\pi \epsilon_0 r^2 E(r) = Q_{in}(r)$

$\leadsto E(r) = \frac{Q_{in}(r)}{4\pi \epsilon_0 r^2}$ (Konstante Ladungsverteilung in Kugel ist egal, sofern kugelsymmetrisch)

Punktladung Q : $E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$, $\varphi = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} + \varphi_0$, $\varphi_0 = \varphi(r=\infty)$

3.3. Feld eines beliebig räumlich begrenzten

Ladungsverteilung

Punktladung bei \vec{r}_0 :
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Mehrere Punktladungen:
(Superposition wegen Linearität der Gl.)
$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung
$$\varphi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Einschub: Ladungsverteilung einer Punktladung und Delta-Funktion

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \vec{r} \neq \vec{r}_0 \\ \infty & \vec{r} = \vec{r}_0 \end{cases}$$

$$\int_{\vec{r}_0 \in V} dV \rho(\vec{r}) = Q$$

$$\rho(\vec{r}) = Q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\int_{\vec{r}_0 \in V} dV \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 1$$

In einer Dimension:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1$$

$$\text{bzw.} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0) \quad \begin{array}{l} \text{für} \\ \text{glatte} \\ \text{Fkt } f(x) \end{array}$$

übliche Definition der Delta-Funktion:
(korrekt: Delta-Distribution)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0)$$

In drei Dimensionen:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad \int dV \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0)$$

↑
gilt nur in kartesischen
Koordinaten

Potential einer Punktladung bei \vec{r}_0 :

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= Q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|} \end{aligned}$$

Delta - Funktion als Limes glatter Funktionen:

$$\bullet \quad \delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$



$$\bullet \quad \delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\sqrt{\pi} x^2 / \varepsilon^2} \quad (\text{bzw. } \frac{1}{\sqrt{\pi} \varepsilon} e^{-x^2 / \varepsilon^2})$$

$$\bullet \quad \delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin x / \varepsilon}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{ikx} dk$$

Einschub:

Greensche Funktion

(zur Lösung inhomogener linearer (Differential-) Gleichungen)

$$L \varphi(x_1, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_n) \quad \text{kurz} \quad \underline{L \varphi(x) = p(x)}$$

\uparrow Linearer Operator \uparrow Inhomogenität

Die Greensche Fkt. $g(x, x')$ zum Operator L ist die Lösung der (Differential-) Gleichung mit δ -förmiger Inhomogenität:

$$\boxed{L g(x, x') = \delta(x - x')} \quad (= \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \dots \delta(x_n - x'_n))$$

Wenn g bekannt ist, kann die Lsg für jede beliebige Inhomogenität durch Superposition gewonnen werden:

$$\underline{\varphi(x) = \int dx' g(x, x') p(x')}$$

Beweis durch Einschub:

$$L \varphi(x) = \int dx' \underbrace{L g(x, x')}_{\delta(x-x')} p(x') = p(x) \quad \text{qed.} //$$

Anwendung auf Potential einer Ladungsverteilung:

$$-\epsilon_0 \Delta \varphi(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

Einführen von g : $-\epsilon_0 \Delta g(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$

($g(\vec{r}, \vec{r}') = g(\vec{r} - \vec{r}')$ wg. Translationsinvarianz)

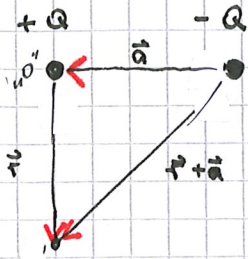
Wir kennen g : Potential einer Punktladung der Größe 1

$$g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|}$$

Damit lautet Lösung der Poisson-Gleichung $-\epsilon_0 \Delta \varphi = \rho$:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \int dV' g(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

3.4. Feld eines elektrischen Dipols



Zwei Ladungen

Dipolmoment

$$\underline{\vec{p}} = Q \underline{\vec{a}} \quad \left(\text{Dipol-Limit } |\underline{\vec{a}}| \rightarrow 0, a \rightarrow \infty : |\underline{p}| = \text{const} \right)$$

$$\approx \varphi(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\underline{r}|} - \frac{1}{|\underline{r} + \underline{a}|} \right)$$

$$|\underline{a}| \ll |\underline{r}|$$

Kleine a bzw. große Abstände: $\frac{1}{|\underline{r} + \underline{a}|} = \frac{1}{|\underline{r}|} + \left(\underline{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \right) \frac{1}{|\underline{r}|} + \dots$

Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}|} = -\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{r}} \otimes \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}|} = -\frac{\partial}{\partial \underline{r}} \otimes \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} = \frac{3\underline{r} \otimes \underline{r} - \mathbb{1} r^2}{r^5}$$

Damit:

$$\underline{\varphi}(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} - \underline{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \frac{1}{r} \right) = \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\underline{\vec{E}}(\underline{r}) = -\frac{\partial}{\partial \underline{r}} \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underline{p} \otimes \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \otimes \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\underline{p} \cdot \underline{r}) \underline{r} - \underline{p} r^2}{r^5}$$

Sym. Tensor

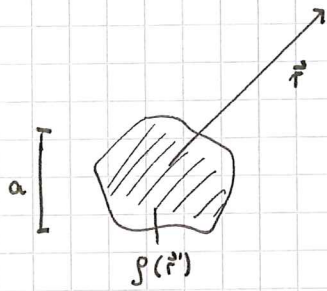
$$\underline{\vec{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underline{\nabla} (\underline{p} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{r})$$

$$\left(\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\underline{p} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{r}) \right)$$

$$E_i = \nabla_i p_j \nabla_j \frac{1}{r} = p_j \nabla_i \nabla_j \frac{1}{r}$$

3.5. Fernfeld einer räumlich begrenzten Ladungsverteilung:

Multipolentwicklung



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Fernfeld: $|\vec{r}| \gg a \rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ entwickeln

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\vec{r}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right)^n \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{r^5} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int dV' \rho(\vec{r}') + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int dV' \vec{r}' \rho(\vec{r}') + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} \int dV' (3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2) \rho(\vec{r}') + \dots \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\vec{r} \cdot \vec{D} \cdot \vec{r}}{r^5} + \dots \right] \end{aligned}$$

$\sim \frac{1}{r}$ $\sim \frac{1}{r^2}$ $\sim \frac{1}{r^3}$

Multipolmomente einer Ladungsverteilung:

- Monopol $Q = \int dV \rho(\vec{r})$
- Dipol $\vec{p} = \int dV \vec{r} \rho(\vec{r})$
- Quadrupol $\vec{D} = \int dV (3\vec{r} \otimes \vec{r} - \mathbb{1} r^2) \rho(\vec{r})$
- Oktupol ...

Bezugspunkt
 ↓
 hängen ja. von Koord.wahl ab!
 Aber: Erster nichtverschwind. Multipolmoment ist unabhängig von Koord.wahl!

- Eigenschaften von D:
- $D_{ij} = D_{ji}$; $\text{Sp } D = \sum_i D_{ii} = \int dV (3r^2 - 3r^2) = \underline{\underline{0}}$!
 - D hat 5 unabhängige Komponenten.
 - D kann hauptachsen transformiert werden (siehe Trägheitsdensor)
 - U9 $\text{Sp } D = 0$ ist $D = 0$ für Kugel, Würfel.

Multipole haben charakteristische Richtungsabhängigkeit: $\varphi(\vec{r}) = Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \cdot \varphi(r)$

Monopol	$l=0$	$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r)$
Dipol	$l=1$	$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) \cdot \cos \angle(\vec{r}, \vec{p})$
Quadrupol	$l=2$	$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) \cdot Y_{l=2, m} \dots$

Multipol-Entwicklung mit Kugelflächenfkt

Ausgangspunkt $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int dV' g(\vec{r}-\vec{r}') \rho(\vec{r}')$

$$-\epsilon_0 \Delta g(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) \quad (\leadsto g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|})$$

Abstands- und Winkel abhängigen Separieren. Explizit in Kugelkoordinaten:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\frac{1}{r^2} \Lambda(\theta, \varphi)$$

Separationsansatz für Dgl \leadsto Suche Lsg für $\frac{\Lambda Y(\theta, \varphi) = -\ell(\ell+1) Y(\theta, \varphi)}{(\ell \text{ lic. beliebig})}$

Separationsansatz $Y(\theta, \varphi) = P(\theta) Q(\varphi)$

mit $\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2 Q(\varphi) \quad \leadsto Q = e^{im\varphi}, \quad m \in \mathbb{Z}$
(2π periodisch)

Substitution $x = \cos \theta$ führt auf verallg. Legendre-Gl:

$$\left(\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} + \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_\ell^m(x) = 0 \quad \downarrow 2,3,4$$

Es gemischt:

$$(1-x^2) P_\ell'' - 2x P_\ell' + \ell(\ell+1) P_\ell = 0 \quad (\text{Legendre-Dgl})$$

denn

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_\ell(x) \quad (-\ell \leq m \leq \ell)$$

Lösungen $P_\ell(x)$ sind Legendre-Polynome (aus Potenzreihenansatz)

$$P_\ell = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{dx} \right)^\ell (x^2-1)^\ell \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1), \dots$$

$\ell = 0, 1, 2, \dots$

$$\leadsto Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

Kugelflächenfkt
(det. auf Kugeloberfl.)

Diese $Y_{\ell m}$ sind also Lsg der Dgl

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \ell(\ell+1) \right) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = 0$$

$$\left(\begin{array}{c} \ell = 0, 1, 2, \dots \\ -\ell \leq m \leq \ell \end{array} \right)$$

Orthogonalität:

$$\langle Y_{\ell m}, Y_{\ell' m'} \rangle = \int_{-1}^1 d\cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell' m'}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}$$

Vollständigkeit:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

bel. Fkt auf Kugelfläche

$$\langle Y_{\ell m} | f \rangle = \int d\cos \theta \int d\varphi Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi)$$

Vb: Allgemeine Lsg der Laplace-Gl (homogene Poisson-Gl)

$$\Delta \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-\ell-1}) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

(Separation + Potenzreihenansatz)

Explizit:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1, \pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right), \dots$$

...

Zurück zur Entwicklung von $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \gamma) \quad \gamma = \angle(\vec{r}, \vec{r}')$$

(mit zu bestimmenden A_l, B_l) (hier φ -Abh. da axiale Symmetrie)

Für $\vec{r}' \parallel \vec{r}$ kann man direkt entwickeln: (in $r_<(r_>$, wobei in r'/r)

$$\frac{1}{|r - r'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(r_< \frac{d}{dr_>} \right)^l \frac{1}{r_>} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^l \quad (r_< = \min(r, r'))$$

↪ Allgemein:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos \gamma)$$

Man kann $P_l(\cos \gamma)$ durch einzelne Winkel ausdrücken:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

mit $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$

(Hier o.B.; Entwicklung nach Kugelf.fkt, nur $l=l'$ überlebt)

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

(vollständig faktorisiert!)

Potential einer Ladungsverteilung:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \underbrace{\int dV' \rho(\vec{r}') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') r'^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}}_{q_{lm} \text{ Multipolmomente}}$$

$$\bullet \quad q_{00} = \sqrt{4\pi} \int dV' \rho(\vec{r}') Y_{00} = Q$$

$$\bullet \quad q_{10} = \int dV' \rho(\vec{r}') \frac{r' \cos \theta'}{2}; \quad q_{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \int dV' \rho(\vec{r}') r' \sin \theta' e^{\mp i\varphi'}$$

$$\sim \vec{p} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (q_{11} + q_{1,-1}), \frac{1}{\sqrt{2}} i (q_{11} - q_{1,-1}), q_{10} \right) \text{ Dipol}$$

$$\bullet \quad q_{2,m} \rightsquigarrow \text{Quadrupolmoment } \vec{D}$$

3.6. Randbedingungen

• $-\epsilon_0 \Delta \varphi = \rho$ ist ^{lineare} Dgl 2. Ordnung

↪ allgemeine Lösung hängt von Randbedingungen ab

Vollständige Lösung :

$\varphi = \varphi_p + \varphi_h$

↑
partikuläre Lsg
des inhom. Gl.

↑
allg. Lösung
des hom. Gl. $\Delta \varphi = 0$

bisher: Rb.
 $\varphi(\infty) = 0$
↪ $\varphi_h \equiv 0$



↪ hier geht Randbed. einbauen

Mathematik:

1 Randbed. auf geschlossenem Rand R ↪ eindeutige Lösung
(Beweis s.u.)

Varianten:

(A) $\varphi(R)$ gegeben

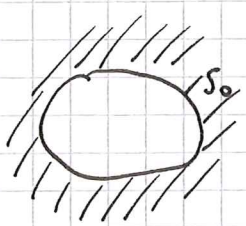
Dirichlet-Rb

(B) $\partial \varphi / \partial n(R)$ (Normalableitung $\hat{=}$ -Normalkomponente von \vec{E})
gegeben: $\partial \varphi / \partial n = \hat{n} \cdot \nabla \varphi / \partial \vec{r} = -\vec{E}_n$

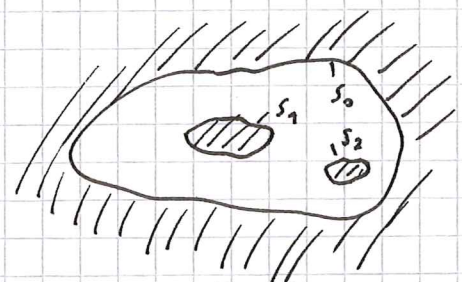
v-Neumann-Rb

(C) $\alpha \varphi + \beta \partial \varphi / \partial n$

Randflächen:



eine Randfläche



mehrere Teilflächen

Falls äußere Randfläche $S_0 \rightarrow \infty$, dann Rb für $\varphi(\infty)$ nötig.

Warum ist für Dgl. 2. Ordnung nur 1 Rb nötig?

Antwort: sind eigentlich 2 Rb, da Rand geschlossen (links & rechts).

Beweis

Annahme 1 Rb, 2 Lösungen φ_1 & φ_2 .

Wir zeigen $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{const.}$

Also:

$$-\epsilon_0 \Delta \varphi_1 = -\epsilon_0 \Delta \varphi_2 = \rho$$

$$\phi := \varphi_2 - \varphi_1, \quad \Delta \phi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \phi \frac{\Delta \phi}{0} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2$$

Divergenz
Theorem

$$\int dV \frac{\partial}{\partial r} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \int dV \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2$$

$$\oint_{\partial V} \frac{d\vec{A}}{dA \cdot \hat{n}} \cdot \phi \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

Varianten:

- (A) $\varphi(R)$ fest $\leadsto \varphi_1(R) = \varphi_2(R) \leadsto \phi(R) = 0 \leadsto \oint_R d\vec{A} \cdot \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$
- (B) $\frac{\partial \varphi}{\partial n}(R)$ fest $\leadsto \frac{\partial \phi}{\partial n}(R) = 0 \leadsto -||-$
- (C) u.o.

$$\leadsto \int dV \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 = 0 \leadsto \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \leadsto \phi = \varphi_2 - \varphi_1 = \text{const.} //$$

ohne phys. Bedeutung

3.7. Leiter im elektrostatischen Feld

Elektrostatik: ruhende Ladungen

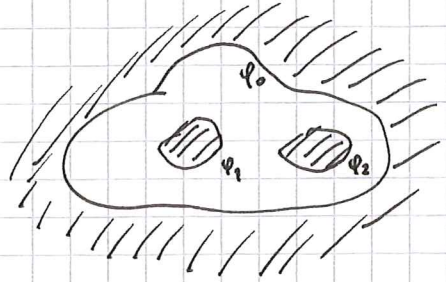
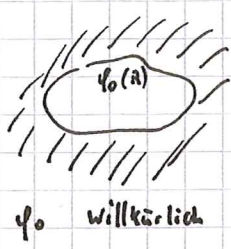
Leiter: bewegliche Ladungen (innerhalb des Leiters)

→ Gleichgewicht sei: $\vec{F} = 0, \vec{E} = 0, \varphi = \text{const}$ (im Leiter)

! $\varphi = \text{const}$ im Inneren und auf Oberfläche des Leiters

→ $\rho = 0$ im Inneren

Geometrie:

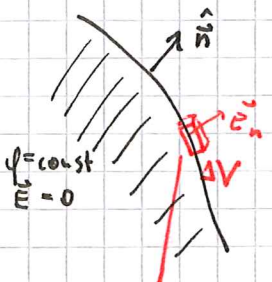


$\varphi_1 - \varphi_0, \varphi_2 - \varphi_0$ haben physikalische Bedeutung

Für $S_0 \rightarrow \infty$ wird $\varphi_0 = \varphi(\infty) = 0$ (Konvention),
dann haben $\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_1$ und $\varphi_2 - \varphi_0 = \varphi_2$ physikalische
Bedeutung (d.h. auch absolute Werte φ_1, φ_2).

Leiteroberfläche

Beweglichkeit der Ladungen bedeutet nur $\vec{E} = 0$ im
Inneren des Leiters und $\vec{E}_{\text{tangential}} = 0$ auf Oberfläche.



Wg $\varphi = \text{const}$ ist Oberfläche eine Äquipotentialfläche.
 $\vec{E} = -\nabla\varphi/\partial r$ steht senkrecht auf Rand, $\vec{E} = \vec{E}_n \parallel \hat{n}$,
und wird durch Oberflächenladungen erzeugt

Volumenelement ΔV
auf Oberfläche ΔA
mit Ladung ΔQ

$$\epsilon_0 \oint_{\partial \Delta V} d\vec{A} \cdot \vec{E} = \Delta Q \quad \leadsto \quad \epsilon_0 \Delta A E_n = \Delta Q$$

Flächenladungsdichte

$$\sigma \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \epsilon_0 E_n$$

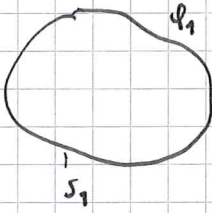
Oberflächenladung

$$Q = \iint dA \sigma$$

Oberflächenladungen werden durch ein äußeres elektrisches Feld erzeugt;
sie schirmen das Innere des Leiters vom Feld ab.

Innenraum eines Hohlleiters

$$|\varphi_0 = \varphi_0|$$



Leiteroberfläche auf $\varphi = \varphi_1$.

Innenraum sei ladungsfrei, $\rho = 0$.

Dann ist im Innenraum $\varphi = \text{const} = \varphi_1$ und $\vec{E} = 0$.

(Faradayscher Käfig)

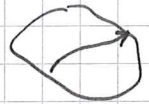
Beweis 1: $\text{div } \vec{E} = 0$ & $\text{rot } \vec{E} = 0$ heißt: Jede Feldlinie im

Innenraum muß auf Rand anfangen und enden.

Integration $-\Delta\varphi = \int d\vec{r} \vec{E}$ würde endliches $\Delta\varphi$

liefern, im Widerspruch zu $\varphi = \text{const}$ auf Leiteroberfläche.

$$\leadsto \vec{E} = 0 //$$



Beweis 2: $\Delta\varphi = 0$ gilt im Innenraum (wie auch im Außenraum).

Mit Randbed $\varphi|_{s_1} = \varphi_1$ ist $\varphi = \text{const} = \varphi_1$ eine Lsg //

(Dies ist die einzige — siehe Eindeutigkeitsbeweis.)

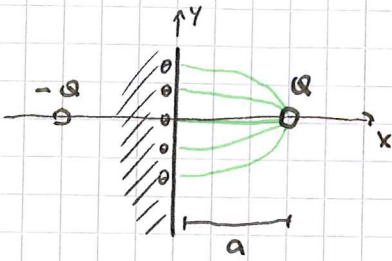
Achtung: Im Außenraum ist die Randbed $\varphi|_{s_1} = \varphi_1$

und $\varphi(\infty) = \varphi_0$. Bei $\varphi_1 - \varphi_0 \neq 0$ ergibt dies ein

nicht verschwindendes Feld.

3.8. Beispiele

(A) Punktladung und ebene Leiterfläche : Spiegel Ladungen



$$\varphi(x=0) = 0 \quad \text{Leiterfläche}$$

$$-\epsilon_0 \Delta \varphi = Q \delta(\vec{r} - a\vec{e}_x)$$

Anordnung aus 2 Punktladungen (Q bei $a\vec{e}_x$ und $-Q$ bei $-a\vec{e}_x$)
erzeugt für $x > 0$ gleiches Feld/Potential wie obige Anordnung.

Begründung allgemein: Für ein beliebiges (gegebenes) Potential $\varphi(\vec{r})$
ändert das Anbringen eines Leiters mit Leiteroberfläche = Äquipotentialfläche
das Feld außerhalb des Leiters nicht!

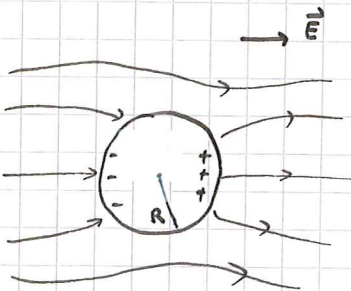
Mathematisch: $-\epsilon_0 \Delta \varphi = \rho$ gilt außerhalb des Leiters unverändert,
und Randbed. sind (effektiv) identisch!

Für obige Situation:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} - \frac{1}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|} \right)$$

$$-\epsilon_0 \Delta \varphi = Q \left(\delta(\vec{r} - a\vec{e}_x) - \delta(\vec{r} + a\vec{e}_x) \right)$$

(B) Kugelleiter in einem asymptotisch homogenen Feld



$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{für } r > R$$

$$\text{Randbedingungen: } \varphi(r=R) = \varphi_0 = 0$$

$$\varphi(r \rightarrow \infty) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \quad (\text{homogenes Feld } \vec{E}_0)$$

Symmetrie überlegen: $\varphi(\vec{r}, R, \vec{E}_0)$ muß skalar und linear in \vec{E}_0 sein.

$$\varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} g(r, R) \quad (\text{Ansatz})$$

$$\text{Randbed: } g(r=R) = 0, \quad g(r \rightarrow \infty) = 1$$

Einsetzen: $\Delta \varphi = - \vec{E}_0 \cdot \vec{r} \left(\frac{4}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2 \varphi}{dr^2} \right) \stackrel{!}{=} 0$

Homogene Dgl für g . Lösung mit Ansatz $g \sim r^n$.

Ergibt $4n + n(n-1) = 0 \Rightarrow n = \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases}$

$\Rightarrow g = c_1 + c_2/r^3$

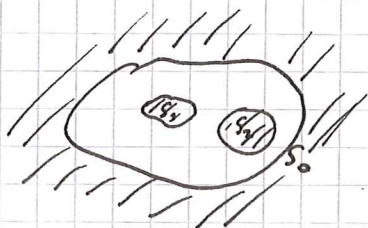
Mit Rb: $g(r=0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$

$g(r=R) = 0 \Rightarrow c_2 = -R^3$

Also $\varphi = - \vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ mit $\vec{p} = \vec{E}_0 R^3$

Das zusätzliche Feld hat Dipol-Form! D.h. äußeres Feld \vec{E}_0 induziert ein Dipolmoment $4\pi\epsilon_0 \vec{E}_0 R^3$ in der Kugel.

3.9. Mehrere Leiter



Keine Raumladungen

$$\Delta \varphi = 0$$

Randbedingungen

$$\varphi = \varphi_i \text{ auf } S_i$$

($\varphi_0 = 0$ willkürlich)

Linearität der Gleichungen:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_k G_k(\vec{r}) \varphi_k$$

(hängen von Geometrie ab)

Ladungen auf den S_i :

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_i} = \epsilon_0 \vec{E}_n \Big|_{S_i} = -\epsilon_0 \sum_k \left. \frac{\partial G_k(\vec{r})}{\partial n} \right|_{S_i} \varphi_k$$

$$Q_i = \oint_{S_i} dA \sigma = -\epsilon_0 \sum_k \oint_{S_i} d\vec{A} \cdot \frac{\partial G_k}{\partial \vec{r}} \varphi_k =: \sum_k C_{ik} \varphi_k$$

Kapazitätskoeffizienten:

$$Q_i =: \sum_k C_{ik} \varphi_k$$

(hängen nur von Geometrie ab)

$$C_{ik} = -\epsilon_0 \oint_{S_i} d\vec{A} \cdot \frac{\partial G_k}{\partial \vec{r}}$$

$$C_{ik} = C_{ki} \text{ o.B.}$$

$$(Q_0 = -\sum_i Q_i, \text{ für } \vec{E} = 0 \text{ in } S_0!)$$

Zwei sich umschließende Leiter:

$$Q_1 = C_{11} \varphi_1 \Rightarrow Q = C \cdot U \quad (Q_0 = -Q_1)$$