4. Stationäre Ströme

4.1. Grundgleichungen – Vektorpotential

Maxwell: $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \qquad \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} = \vec{j}$$

Stationär $\hat{=}$ $\partial/\partial t = 0 \curvearrowright \dot{\vec{E}} = 0 \curvearrowright \operatorname{div} \vec{j} \overset{\text{div rot} = 0}{=} 0$

Wirbelfelder sind quellenfrei. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ läßt sich durch Einführen eines Vektorpotentials $\vec{A}$ auflösen:

$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}}$$

Eichinvarianz: $\vec{B}$ bestimmt $\vec{A}$ nicht eindeutig, denn $\vec{A}$ und $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$ liefern wegen $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \chi = 0$ dasselbe $\vec{B}$-Feld.

$\curvearrowright$ $\vec{A}$ ist bis auf Eichtransformation $\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$ (mit beliebiger skalarer Fkt $\chi(\vec{r})$) bestimmt. Bei spezieller Wahl von χ spricht man von fixierter Eichung.

Weiter mit Maxwell für stationäre Ströme: $1/\mu_0 \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j}$

$$\curvearrowright \quad \frac{1}{\mu_0} \left(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} \right) = \vec{j} \quad \text{oder} \quad \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Es bietet sich an, die Eichung $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ (Coulomb-Eichung) zu wählen. (Für beliebiges $\vec{A}$ gilt $\operatorname{div} \vec{A}' = 0$ mit $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$, $\Delta \chi = -\operatorname{div} \vec{A}$.)
lösbar – Poisson!

Dann

$$\boxed{-\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}}$$

[Analogie zur Elektrostatik: $-\Delta \varphi = \rho/\varepsilon_0$ wird gelöst durch $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dV' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$]

$$\curvearrowright \quad \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dV' \, \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} \quad (\text{mit } \operatorname{div} \vec{A} = 0)$$

↓ 304.

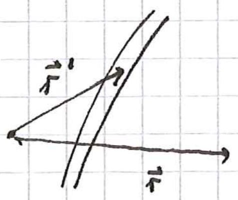
Es folgt $(\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A})$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dV' \; \vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

Kontrolle: $\operatorname{div} \vec{A} = 0$? $\quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV'' \frac{\vec{j}(\vec{r} + \vec{r}\,'')}{r''} \quad (\vec{r} - \vec{r}\,' = \vec{r}\,'')$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV'' \frac{1}{r''} \underbrace{\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r} + \vec{r}\,'')}_{0} = 0 \quad //$$

4.2. Leiterschleifen



Obige Formel für „dünne" Leiter: $d \ll |\vec{r} - \vec{r}\,'|$:

Dann ist $\quad \frac{dV' \; \vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{d\vec{r}\,' \; I}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$

Mehrere Leiter L_n $\curvearrowright$ $\quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_n I_n \int_{L_n} \frac{d\vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_n I_n \int_{L_n} d\vec{r}\,' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}$$

Biot-Savartsches Gesetz

Mehrere geschlossene Leiterschleifen:

Magnetischer Fluß $\quad \phi_m = \iint_{S_m} d\vec{A} \cdot \vec{B} = \oint_{\partial S_m} d\vec{r} \cdot \vec{A}$

F

Mit Biot-Savart:

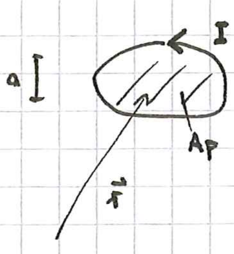
$$\phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_n I_n \oint_{\partial S_m} d\vec{r} \oint_{\partial S_n} d\vec{r}\,' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} =: \sum_n L_{mn} I_n$$

Induktivitätskoeffizienten:

$$\boxed{\phi_i = \sum_k L_{ik} I_k} \qquad L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S_i} d\vec{r} \oint_{\partial S_k} d\vec{r}\,' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}, \quad L_{ik} = L_{ki}$$

$i = k$: Selbstinduktivität, kann nicht mit dieser Formel berechnet werden, da Näherung des dünnen Leiters zusammenbricht

4.3. Magnetischer Dipol



Leiterschleife mit Ringstrom,

Dipolmoment $\vec m = I\cdot\vec A_F$

Fläche mit Normalenrichtung

(Dipol-Limit: $|\vec A_F|\to 0$, $I\to\infty$, $|\vec m| = \text{const}$)

$$\rightsquigarrow \quad \vec A(\vec r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\vec r\,'}{|\vec r-\vec r\,'|}$$

Kleines A_F bzw. große Abstände:

$$\frac{1}{|\vec r-\vec r\,'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec r\cdot\vec r\,'}{r^3}$$

$$\rightsquigarrow \quad \oint\frac{d\vec r\,'}{|\vec r-\vec r\,'|} = \underbrace{\oint\frac{d\vec r\,'}{r}}_{=0} + \frac{\vec r}{r^3}\oint d\vec r\,'\otimes\vec r\,'$$

Umformen des Integrals:

$$\oint d\vec r\,'(\vec r\,'\cdot\vec a) = \frac{1}{2}\left[\oint d\vec r\,'(\vec r\,'\cdot\vec a) - \oint(d\vec r\,'\cdot\vec a)\,\vec r\,'\right] + \frac{1}{2}\left[\oint d\vec r\,'(\vec r\,'\cdot\vec a) + \oint(d\vec r\,'\cdot\vec a)\,\vec r\,'\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\oint(\vec r\,'\times d\vec r\,')\times\vec a}_{\text{Fläche } \vec A_F \text{ (Dreieck!)}} + \underbrace{\frac{1}{2}\oint d\left[\vec r\,'(\vec r\,'\cdot\vec a)\right]}_{0}$$

Für nicht-ebene Schleife wird hier über $d\vec A_F$ vektoriell (!) summiert!

$$\rightsquigarrow \quad \vec A(\vec r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\vec A_F\times\frac{\vec r}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec m\times\vec r}{r^3}$$

(Vgl. elektr. Dipol $\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}$)

$$\vec B(\vec r) = \operatorname{rot}\vec A = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\underbrace{\vec\nabla\times\left(\vec A_F\times\vec\nabla\frac{1}{r}\right)}_{\vec A_F\,\underbrace{\Delta\frac{1}{r}}_{-4\pi\delta(\vec r)} - \underbrace{(\vec A_F\cdot\vec\nabla)\vec\nabla\frac{1}{r}}_{\vec A_F\,(\vec\nabla\otimes\vec\nabla)\frac{1}{r}}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3(\vec m\cdot\vec r)\vec r-\vec m r^2}{r^5}$$

./.

Statt Leiterschleife: Ladung auf Umlaufbahn (Ladung Q, Masse M)

$$I = Q/\tau \leftarrow \text{Umlaufzeit}$$

$$\vec{A}_p = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \, \underbrace{\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)}_{\frac{1}{M} \vec{L}} = \frac{1}{2} \tau \frac{\vec{L}}{M}$$

$$\leadsto \vec{m} = I \cdot \vec{A}_p = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{Q}{M}}_{g_B = \frac{Q}{2M}} \vec{L} \qquad \left(\text{vgl. } \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \right)$$

Allgemeine Stromverteilung

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int dV \left(\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) \right)$$

(hier o.B., Herleitung analog zu $\vec{p} = \int dV \, \vec{r} \, \rho(\vec{r})$)

(Faktor $\frac{1}{2}$ von doppeltem Kreuzprodukt)