5. Elektromagnetische Wellen

5.1. Wellengleichung

Bisher: $\rho(\vec{r})$, $\vec{j}(\vec{r})$, $\partial_t = 0$

Jetzt: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, $\partial_t \neq 0$ $\curvearrowright$ Wellen im Vakuum ohne Quellen

Maxwell für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$: $\quad \operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{E}}$$

$$\curvearrowright \quad \operatorname{rot} \dot{\vec{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \ddot{\vec{E}} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\vec{E}}_{\rho/\varepsilon_0 = 0}) + \Delta \vec{E}$$

$$\curvearrowright \quad \boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{E} = \Box \vec{E} = 0}$$

Wellengleichung

$\Box \vec{B} = 0$ analog

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}, \qquad [c] = \text{Geschwindigkeit, const}$$

5.2. Lösungen der Wellengleichung $\quad \Box u = 0$

a) <u>Eindimensionale Lsg</u> $\quad \vec{r} \longrightarrow x$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = 0$$

$$= \left(\frac{1}{c}\partial_t - \partial_x\right)\left(\frac{1}{c}\partial_t + \partial_x\right) u(x,t) = 0$$

① $\left(\frac{1}{c}\partial_t + \partial_x\right) u = 0 \quad \curvearrowright \quad \partial_t u = -c\partial_x u \quad \curvearrowright \quad u = u_1(x - ct)$

② $\left(\frac{1}{c}\partial_t - \partial_x\right) u = 0 \quad \curvearrowright \quad \partial_t u = +c\partial_x x \quad \curvearrowright \quad u = u_2(x + ct)$

u_1, u_2 sind <u>beliebige</u> Fkt. <u>einer</u> Arguments.

$\curvearrowright$ Vollständige Lösung $\quad u = u_1(x-ct) + u_2(x+ct)$

Anfangsbedingungen: $\quad u(t=0,x)\ , \quad \partial_t u(t=0,x)$

2 beliebige Fkt (Dgl. 2. Ordnung), AB können durch u_1 & u_2 befriedigt werden.

Ausbreitung mit $\pm c$.

b) Harmonische Wellen

$\Box u = 0 \quad \curvearrowright$ Exponentialansatz $\quad u = u_0 e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t}$

$$= u_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Einsetzen:

$$\Box u = \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2\right) u = \left[\left(\frac{-i\omega}{c}\right)^2 - (ik)^2\right] u = 0$$

$\curvearrowright \quad \omega^2 = c^2 \vec{k}^2 \quad \curvearrowright$ Dispersionsrelation $\omega(\vec{k})$

Ausbreitungsrichtung $\quad \hat{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$

Speziell $\quad \vec{k} = k\,\vec{e}_x\ , \quad u = u_0 e^{i(kx-\omega t)} = \underbrace{u_0 e^{ik\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)}}_{\text{Spezialfall für } u_1(x-ct) \text{ aus a)}}$

$c = \frac{\omega}{k}$ Phasengeschwindigkeit $\quad (k = 2\pi/\lambda)$

Allgemein $\quad \vec{k} = k\,\hat{n}\ , \quad \vec{c} = \vec{n}\,\frac{\omega}{k} = \frac{\vec{k}}{k^2}\,\omega$

c) Allgemeine Lösung

$$u(\vec{r},t) = \mathrm{Re} \int d^3k\ u(\vec{k})\, e^{i\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)\,t\right]}$$

2 freie Funktionen $\quad \mathrm{Re}\, u(\vec{k}),\ \mathrm{Im}\, u(\vec{k}) \quad$ für

2 reelle Anfangsbed. $\quad u(\vec{r},t=0)\ , \quad \partial_t u(\vec{r},t=0)$

5.3. Polarisation

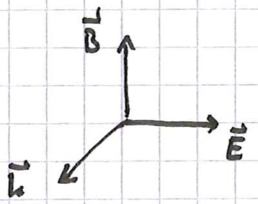
$\Box \vec{E} = 0$, spezielle Lsg $\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$

Bis jetzt ist $\vec{E}_0$ - Richtung beliebig. Aber:

div $\vec{E} = 0$:

$$\operatorname{div} \vec{E} = i \vec{k}\cdot\vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \overset{!}{=} 0 \curvearrowright \vec{k} \perp \vec{E}_0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \curvearrowright i\vec{k}\times\vec{E} = i\omega\vec{B} \,, \quad \frac{\vec{k}}{k}\times\vec{E} = \frac{\omega}{k}\vec{B} \quad (\vec{k}\perp\vec{B}_0)$$

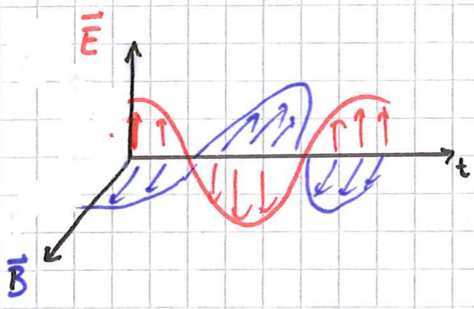


$$\hat{k}\times\vec{E} = c\vec{B}$$
$$(\hat{k}\times\vec{E}_0 = c\vec{B}_0)$$

„Wellen sind transversal"

a) $\vec{E}_0$ reell

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$
$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$



„Lineare Polarisation"

b) $\vec{E}_0$ komplex $\curvearrowright$

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + i\vec{E}_2 \,, \quad \vec{E}_1, \vec{E}_2 \perp \vec{k}, \text{ reell}$$

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_1 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) - \vec{E}_2 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

(2 linear polarisierte Wellen mit Phasenverschiebung)

[$\vec{r} = 0$]

① $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2 \parallel \hat{e}$

$$\vec{E}(t) = \hat{e}\,(E_1 \cos\omega t + E_2 \sin\omega t)$$
$$\vec{E} = \hat{e}\, E' \cos(\omega t + \varphi)$$

Linear polarisiert

② $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$, speziell $\vec{E}_1 \parallel \hat{e}_x$, $\vec{E}_2 \parallel \hat{e}_y$, $\vec{k} \parallel \hat{e}_z$

$$\vec{E}(t) = E_1 \hat{e}_x \cos\omega t + E_2 \hat{e}_y \sin\omega t$$

Elliptisch polarisiert

Speziell $|E_1| = |E_2|$: $E_1 = \begin{cases} +E_2 & \circlearrowleft \\ -E_2 & \circlearrowright \end{cases}$ Ok links / rechts zirkular polarisiert

③ $\vec{E}_1 \nparallel \vec{E}_2$, $\vec{E}_1 \not\perp \vec{E}_2$ $\curvearrowright$ auch Elliptisch polarisiert (o.B.)