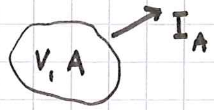
6. Energie- und Impulsbilanz des elektromagnetischen Feldes

6.1. Bilanzgleichungen



bekannt: $\dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$

allgemein: „Observable" (≙ Messgröße) $A = \int_V dV\, a$, $a = dA/dV$ Dichte von A

$\dot{A}(t) = -I_A + N_A$ = − Strom + Erzeugungsrate

Erzeugungsrate $N_A = V \cdot \nu_a$

$$\int dV\, \partial_t a = -\oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{j}_a + \int dV\, \nu_a = \int dV \left(-\operatorname{div} \vec{j}_a + \nu_a\right)$$

$\vec{j}_a$: Stromdichte, ν_a: Erzeugungsdichte

$$\curvearrowright \quad \boxed{\dot{a} + \operatorname{div} \vec{j}_a = \nu_a}$$

Allgemeine Bilanzgleichung

Für Erhaltungsgrößen: $N_A = 0$, $\nu_a = 0$ $\curvearrowright$ $\dot{a} + \operatorname{div} \vec{j}_a = 0$, $\dot{A} = -\oint d\vec{F} \cdot \vec{j}_a$

Falls $V \to \infty$: $\dot{A} = 0$, $A = \text{const}$

6.2. Energiebilanz des el.mag. Feldes

Punktladung: $\vec{F}_L = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$

Leistung des Feldes an Punktladung $N = \text{Arbeit}/\text{Zeit} = \vec{v} \cdot \vec{F}_L$

Energieänderung des el.mag. Feldes $\dot{W}_{elm} = -N = -\vec{v} \cdot \vec{F}_L = -Q\, \vec{v} \cdot \vec{E}$

$\curvearrowright$ Änderung der Energiedichte (mehrere Ladungsträgersorten)

$$\nu = -\sum_i \rho_i \vec{v}_i \cdot \vec{E} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Bsp: Ohmsches Gesetz $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, $\nu = -\sigma E^2 = -j^2/\sigma$ Ohmsche Wärme

Damit lautet Bilanzgl.

$$\underline{\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S}_p = \nu = -\vec{j}\cdot\vec{E}}$$

(Poynting-Theorem)

w = Energiedichte $\vec{S}_p$ = Energiestromdichte (Poynting-Vektor)

w & $\vec{S}_p$ hängen von Feldern ab — noch zu bestimmen!

Maxwell:
$$\nu = -\vec{j}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}\cdot\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}(\operatorname{rot}\vec{B})\cdot\vec{E}$$

$$= \partial_t\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2\right) - \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\vec{E}) - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\,\underbrace{(\operatorname{rot}\vec{E})}_{-\dot{\vec{B}}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\partial_t\left(\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{B})$$

$\curvearrowright$

$$\boxed{\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right)\\ \vec{S}_p &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\\ \nu &= -\vec{j}\cdot\vec{E}\end{aligned}}$$

$$\partial_t w + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}_p = \nu$$

6.3. Elektrostatische Feldenergie

$$W_e = \int dV\,\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 = -\int dV\,\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}\cdot\operatorname{grad}\varphi$$

$\left(\begin{aligned} E &= -\operatorname{grad}\varphi,\\ \operatorname{div}\vec{E} &= \rho/\varepsilon_0\end{aligned}\right)$

Erinnerung: partielle Integration in 3d

$$\int dV\,\frac{\partial}{\partial\vec{r}}(uv) = \int dV\,\frac{\partial u}{\partial\vec{r}}\,v + \int dV\,u\,\frac{\partial v}{\partial\vec{r}} = \oint\!\!\oint_{\partial V} d\vec{A}\,uv$$

Damit:

$$\underline{W_e} = \int dV\,\frac{\varepsilon_0}{2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,\varphi - \oint\!\!\oint d\vec{A}\,\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}\varphi$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\int dV\,\rho\varphi}$$

$\rightarrow 0$ für unendliches Integrationsgebiet (ganzer Raum)

$$= \frac{1}{2}\int dQ\,\varphi$$

(Energie = Ladung · Potential)

Umschreiben:

$$W_e = \frac{1}{2}\int dV\, \rho\, \varphi = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int dV\, dV' \frac{\rho(\vec r)\,\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

Punktladungen: $$W_e = \sum_{i\neq j} \frac{Q_i Q_j}{8\pi\varepsilon_0 |\vec r_i - \vec r_j|} + \text{Selbstenergien } (i=j)$$
$$= \sum_{i<j} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\vec r_i - \vec r_j|} + \text{—\,''\,—} \quad \text{(wie erwartet)}$$

Selbstenergie einer Ladung: (Kugel mit Radius a)

$$W_e = \alpha \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

homogene Kugel $\alpha = 6/5$

Hohlkugel $\alpha = 1$

$W_e \to \infty$ für Punktladung! (Klassische E.dynamik als Kontinuums theorie nicht anwendbar! Funktioniert also nicht für Elementarteilchen (punktförmig))

6.4. Elektrostatische Energie einer Leiteranordnung

Keine Raumladungen, nur Ladungen auf Leiteroberflächen

$$W_e = \frac{1}{2}\int dV\, \rho\varphi \overset{\frac{1}{2}\oiint dA\, \sigma\varphi}{=} \frac{1}{2}\sum_i Q_i \varphi_i \quad (\varphi = \varphi_i = \text{const auf Leiteroberfläche } S_i)$$

z.B. $Q_1 = -Q_2 = Q$: $\quad W_e = \frac{1}{2}Q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = Q^2/2C$

Allg. $$Q_i = \sum_k C_{ik}\varphi_k$$

$$\curvearrowright W_e = \frac{1}{2}\sum_{ik} \varphi_i C_{ik} \varphi_k = \frac{1}{2}\sum_{ik} Q_i \tilde C_{ik} Q_k \geq 0 \quad \left(\text{wegen } W_e = \int \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 > 0\right)$$

$\curvearrowright$ C_{ik}, $\tilde C_{ik}$ positiv definit

z.B. $\varphi_i \neq 0$, $\varphi_{k\neq i} = 0$ $\curvearrowright$ $C_{ii} > 0$, $\tilde C_{ii} > 0$

Kleine Ladungsänderung: $\rho \to \rho + \delta\rho$, $\varphi \to \varphi + \delta\varphi$

$$\delta\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dV' \, \delta\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$\delta W_e = \frac{1}{2} \int dV \, (\delta\rho \, \varphi + \rho \, \delta\varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{1}{2} \times 2 \int dV dV' \frac{\rho(\vec r) \, \delta\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$= \int dV \, \delta\rho \, \varphi = \int dV \, \rho \, \delta\varphi$$

! ρ-Variation äquivalent zu φ-Variation !

Flächenladungen: $\delta W_e = \frac{1}{2} \int dA \, \delta(\sigma\varphi) = \int dA \, \delta\sigma \, \varphi = \int dA \, \sigma \, \delta\varphi$

Leiter: $\delta W_e = \frac{1}{2} \sum \delta(Q_i \varphi_i) = \sum \varphi_i \, \delta Q_i = \sum Q_i \, \delta\varphi_i$

Spezialfälle:

① Verschiebung von Ladungen entlang der Leiteroberfläche

$\delta Q_i = 0$ (!) $\curvearrowright$ $\delta W_e = 0$ (Verschiebung $\perp$ Kraft ($\parallel \vec E$) $\curvearrowright$ Arbeit $= 0$)

$\curvearrowright$ W_e nimmt Extremum an (i.a. Minimum)

zu linearer Ordnung!

Thomsonscher Satz:

Ladungen verteilen sich so, daß W_e minimal wird

② Transport von Ladungen zwischen Leitern

$\delta Q_i \neq 0$

$$\delta W_e = \sum Q_i \, \delta\varphi_i = \sum \varphi_i \, \delta Q_i$$

aus $W_e = \frac{1}{2} \sum_{ik} \varphi_i C_{ik} \varphi_k$

Beachte: $C_{ik} = \dfrac{\partial^2 W_e}{\partial\varphi_i \partial\varphi_k}$ ($\curvearrowright$ $C_{ik} = C_{ki}$ symmetrisch)

$$Q_i = \frac{\partial W_e}{\partial\varphi_i} = \sum C_{ik} \varphi_k$$

$$\delta W_e = \sum_i \frac{\partial W_e(\varphi_k)}{\partial\varphi_i} \delta\varphi_i \qquad \text{(tot. Diff)}$$

6.5. Energie des stationären Magnetfeldes

$$W_m = \int dV \, \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \int dV \, \frac{1}{2\mu_0} \vec{B} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{A} = \int dV \, \frac{1}{2\mu_0} (\vec{B} \times \vec{\nabla}) \vec{A}$$

$$\overset{\text{p.I.}}{=} \int dV \, \frac{1}{2\mu_0} \vec{A} \, (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad + \text{Oberflächenintegral}$$

$\to 0$ für $V \to \infty$ (Felder fallen schnell ab)

$$W_m = \frac{1}{2} \int dV \quad \vec{j} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \qquad \left(\frac{1}{\mu_0} \mathrm{rot}\,\vec{B} = \vec{j} + \cancel{\varepsilon_0 \dot{\vec{E}}} \right)$$

$$W_m = \frac{\mu_0}{8\pi} \int dV \, dV' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Lineare Leiter: $\int dV \, \vec{j} \to \int d\vec{r} \, I$

Schleifen

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i I_i \int_{\mathcal{L}_i} d\vec{r} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} \sum I_i \, \phi_i \qquad \left(\phi = \int d\vec{A}_F \cdot \vec{B} = \oint d\vec{r} \cdot \vec{A} \right)$$

Allg: $\phi_i = \sum_k L_{ik} \, I_k$

$$\leadsto W_m = \frac{1}{2} \sum_{ik} I_i \, L_{ik} \, I_k$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} I_i I_k \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}_i} d\vec{r}' \int_{\mathcal{L}_k} d\vec{r}'' \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}''|}}_{L_{ik}} \quad + \text{Selbstenergien } (i = k)$$

Selbstenergie einer Leiterschleife (endliche Dicke!)

$$W_m = \frac{L I^2}{2}$$

$W_m = \ldots$

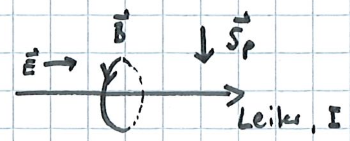
$$L = \frac{\mu_0}{4\pi I^2} \int dV dV' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}) \, \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{I^2} \int dV \, \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} = \frac{1}{I^2} \int dV \, \vec{j} \cdot \vec{A}$$

$$= \phi / I$$

Landau Bd 8

6.6. Beispiele für die Energiestromdichte

a) Stromdurchflossener gerader Leiter (nichtideal)



$$\frac{1}{\mu_0}\,\text{rot}\,\vec B = \vec j + \cancel{\varepsilon_0 \dot{\vec E}}$$

$$\oint d\vec r\cdot\vec B = \mu_0 I \quad \curvearrowright \quad \text{tangentiales } \vec B\text{-Feld} \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi r_\perp}\, I$$

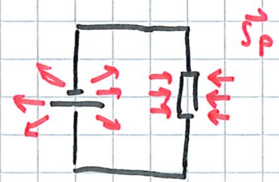
Strom $\vec j = \sigma \vec E$ (Ohmsches Gesetz)

$\leadsto$ $\vec S_p = \frac{1}{\mu_0}(\vec E\times\vec B)$ $\curvearrowright$ $\vec S_p$ radial nach innen gerichtet!

Flächenintegral: $\iint d\vec A_F\cdot\vec S_p = 2\pi r_\perp \ell S_p = 2\pi r_\perp \ell \frac{1}{\mu_0} E \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp} = \ell E I$

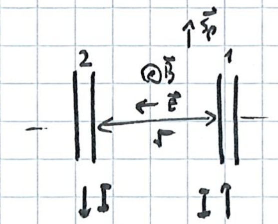
$\leadsto$ Leistung (Energie/Zeit) $N = \ell E\cdot I = U\cdot I$ (Ohmsche Verluste)

Leiterschleife:



(Argument für Spannungsquelle analog, aber mit umgekehrtem Vz)

b) Doppelleiter (ideal)



Energiestrom durch Querschnittsfläche

$$N = \int d\vec A_F\cdot\vec S_p = \frac{1}{\mu_0}\int d\vec A_F\,(\vec E\times\vec B)$$

$$\underset{\text{stationär}}{=} -\frac{1}{\mu_0}\int d\vec A_F\,(\vec\nabla\varphi\times\vec B) = -\frac{1}{\mu_0}\underbrace{\int d\vec A_F\,\vec\nabla\times(\varphi\vec B)}_{\oint d\vec r\,\varphi\vec B = 0 \text{ im Unendlichen}} + \frac{1}{\mu_0}\int d\vec A_F\,\varphi\,\underbrace{\vec\nabla\times\vec B}_{\mu_0\vec j}$$

$\leadsto$ $N = \int d\vec A_F\,\varphi\,\vec j = I(\varphi_1-\varphi_2) = I\cdot U_{12}$ (transportierte Leistung!)

6.7. Energie einer ebenen harmonischen Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \operatorname{Re} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \qquad \vec{E}_0 \perp \vec{k} \quad , \quad E_0 \text{ reell}$$

$$\vec{B} = 1/c \quad \hat{k} \times \vec{E} \qquad \hat{k} = \vec{k}/k$$

Energiedichte:

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

$$= \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}_0^2 + \frac{1}{2\mu_0 c^2} (\hat{k} \times \vec{E}_0)^2 \right] \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$= \varepsilon_0 \vec{E}_0^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

Achtung: $\operatorname{Re} e^{i\dots}$ wichtig, da $(\operatorname{Re} z)^2 \neq \operatorname{Re}(z^2)$

Nach räumlicher oder zeitlicher Mittelung: $\overline{\cos^2 \dots} = \frac{1}{2}$

$$\curvearrowright \quad \overline{w} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}_0^2$$

Beobachtung: Mittelung äquivalent zu $\frac{1}{2} \vec{E}\vec{E}^* = \overline{(\operatorname{Re} \vec{E})^2}$

Energiestromdichte:

$$\vec{S}_P = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}_0 \times (\hat{k} \times \vec{E}_0) \cos^2(\,)$$

$$= \varepsilon_0 c \left(\hat{k} \vec{E}_0^2 - \vec{E}_0 \underbrace{(\hat{k} \cdot \vec{E}_0)}_{=0} \right) \cos^2(\,)$$

$$\vec{S}_P = \varepsilon_0 \hat{k} \, \varepsilon_0 \vec{E}_0^2 \cos^2(\,) = c \hat{k} w \qquad (\text{Vgl. } \vec{j} = \rho \vec{v})$$

Mittelung:

$$\overline{\vec{S}_P} = c\hat{k}\,\overline{w} = c\hat{k} \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}_0^2 = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{B}^*) \quad \left(= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\vec{E}^* \times \vec{B}) \right)$$

nötig für zirkuläre Pol.

6.8. Impulsbilanz des elektromagnetischen Feldes

Kraft = Impulsänderung $\curvearrowright$ $\underbrace{\vec{F}_L}_{\text{Lorentzkraft}} = \dot{\vec{p}}_{mech} = -\underbrace{\dot{\vec{p}}_{elm}}_{\text{Impuls des elmag Feldes}}$

Bilanzgleichung pro Volumen:

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}}_{\text{Impulsdichte}} + \underbrace{\operatorname{div} \hat{T}}_{\text{Impulsstromdichte}} = -\vec{f}_L$$

elmag. Impulserzeugungsrate v_g = − Lorentzkraftdichte $= -\vec{f}_L = -(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})$

$\vec{g}$ & $\hat{T}$ hängen von Feldern ab – noch zu bestimmen.

Maxwells

$$-\vec{f}_L = -\varepsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} \times \vec{B}$$

Umformen:

$$\dot{\vec{E}} \times \vec{B} = \partial_t (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \dot{\vec{B}} = \partial_t (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

$$\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{E} \cdot \vec{E}) - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \vec{E}^2 - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

($\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$ analog)

Insgesamt in Komponenten:

$$(-\vec{f}_L)_k = \partial_t \, \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_0 \left(\frac{\vec{E}^2}{2} \delta_{ik} - E_i E_k \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\vec{B}^2}{2} \delta_{ik} - B_i B_k \right)$$

der fehlende $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B}$ – Term ist Null wg $\operatorname{div} \vec{B} = 0$!

$\curvearrowright$

Impulsdichte: $\vec{g} = \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$

Impulsstromdichte (= Maxwellscher Spannungstensor): $\hat{T} = \varepsilon_0 \left(\frac{\vec{E}^2}{2} \mathbb{1} - \vec{E} \otimes \vec{E} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\vec{B}^2}{2} \mathbb{1} - \vec{B} \otimes \vec{B} \right)$

$v_g = -\vec{f}_L$

$$\partial_t \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \hat{T} = -\vec{f}_L$$

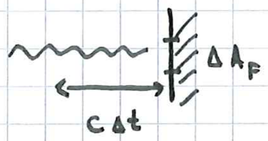
Diskussion:

Impulsdichte $\vec{g} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{S}_P = \frac{1}{c^2} \vec{S}_P$ (allgemeingültig für Feldtheorie bei Ausbreitung mit c)

Siehe Relativitätstheorie: $p = mc$, $E = pc = mc^2$

(Welle $|\vec{S}_P| = c \cdot w \curvearrowright |\vec{g}| = w/c$)

Zusammenhang mit Strahlungsdruck: (Absorption einer el.mag. Welle)



Impulsübertrag: $\Delta\vec{p} = \vec{g}\,\Delta V = \vec{g}\, c\,\Delta t\,\Delta A_F$

Druck

$$P = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{|\Delta\vec{p}\,|}{\Delta A_F\,\Delta t} = c \cdot |\vec{g}| = w$$

Impulsstromdichte Tensor T_{ik} (k = Impulskomponente, i = Transportrichtung)

- $T_{ik} = T_{ki}$ (folgt u.a. aus Drehimpulsbilanz)
- $[T_{ik}] = [\vec{f}\,][\ell] = \frac{[\vec{F}]}{[\ell]^2}$ Druck/Spannung
- Stationäres Feld $\dot{\vec{g}} = 0 \curvearrowright \frac{\partial \hat{T}}{\partial \vec{r}} = -\vec{f}_L$

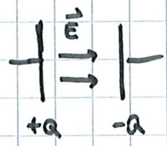
$$\int dV \curvearrowright \oiint d\vec{A}_F\,\hat{T} = -\vec{F}_L \qquad d\vec{F}_L = -d\vec{A}_F \cdot \hat{T}$$

Oberflächenkräfte

(Richtungskonvention: Fläche schließt Ströme/Ladungen ein, auf die die Kraft wirkt)

6.9. Beispiele für die Impulsbilanz

a) Plattenkondensator



$\vec E = E\,\vec e_x$

$$T_{ik} = \varepsilon_0 \left(\tfrac{1}{2} \vec E^2 \mathbb{1} - \vec E \otimes \vec E \right)$$

$$T_{xx} = -\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \,, \qquad T_{xy} = T_{xz} = T_{yz} = 0$$

$$T_{yy} = T_{zz} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

Kraft auf linke Platte: $\underline{(\vec F_L)_x} = - \oiint (d\vec A_F \cdot \hat T)_x = - A_{F,x} T_{xx} = \frac{\varepsilon_0}{2} A_F E^2 = \underline{\frac{QE}{2}}$

(Anziehung!)

b) Lange Spule

$$\vec B = \mu_0 I \frac{N}{\ell} \vec e_x$$ (N: Windungszahl) auf Achse der Spule (folgt aus $\oint d\vec r \cdot \vec B = \mu_0 I$)

$$\curvearrowright \quad T_{xx} = -T_{yy} = -T_{zz} = -\frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad \text{(w.o.)}$$

– Spule quer teilen, Kraft auf linken Teil:

$$\underline{(\vec F_L)_x} = - \underset{\pi R^2}{A_{F,x}} T_{xx} = \frac{A_F}{2\mu_0} B^2 = \underline{\frac{A_F \mu_0 (I \cdot N)^2}{2 \ell^2}} \qquad \text{(Anziehung)}$$

– Spule längs teilen, Kraft auf unteren Teil:

$$\underline{(\vec F_L)_y} = - \underset{2R\cdot\ell}{A_{F,y}} T_{yy} = \underline{- \frac{R \cdot \ell \, B^2}{\mu_0}} \qquad \text{(Abstoßung)}$$

Interpretation Feldlinien: Zug $\parallel$ Feldlinien
Druck $\perp$ Feldlinien **!**

c) Isotrope Strahlung in einem Hohlraum

$$\bar{\hat T} = \overline{\varepsilon_0 \left(\tfrac{1}{2} \vec E^2 \mathbb{1} - \vec E \otimes \vec E \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\tfrac{1}{2} \vec B^2 \mathbb{1} - \vec B \otimes \vec B \right)} = T_0 \mathbb{1}$$

zeitl. Ortsmittel

$$\mathrm{Sp}\, \bar{\hat T} = 3 T_0 = \varepsilon_0 \overline{\left(\tfrac{3}{2} \vec E^2 - E^2 \right)} + \frac{1}{\mu_0} \overline{\left(\tfrac{3}{2} \vec B^2 - \vec B^2 \right)} = \frac{\varepsilon_0}{2} \overline{\vec E^2} + \frac{1}{2\mu_0} \overline{\vec B^2}$$

$$\curvearrowright \quad \underline{T_0 = \frac{1}{3} \bar w} \,, \qquad \underline{\bar{\hat T} = \frac{\bar w}{3} \mathbb{1}}$$

Kraft auf Wand: $\Delta \vec F_e = - \oiint d\vec A_F \cdot \bar{\hat T} = - \Delta \vec A_F \, \bar{\hat T} = - \Delta \vec A_F \, \frac{\bar w}{3}$

$\curvearrowright$ Strahlungsdruck $\underline{p = w/3}$ $\quad (w \sim T^4 \curvearrowright p \sim T^4)$

(Beachte: $p = w$ bei gerichtetem senkrechtem Einfall!)