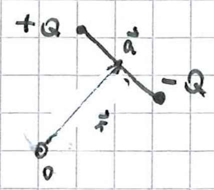
7. Kraftwirkungen auf Ladungen und Ströme

$$\vec{F}_L = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

7.1. Elektrischer Dipol



Kraft $\vec{F} = Q\, \vec{E}(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}) - Q\, \vec{E}(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2})$ (= 0 für homogenes Feld)

Dipollimit $|\vec{a}| \to 0$ $\curvearrowright$ Entwickeln:

$$\vec{F} = Q\left[\vec{E}(\vec{r}) + \tfrac{1}{2}\left(\vec{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) \vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}) + \tfrac{1}{2}\left(\vec{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) \vec{E}(\vec{r}) \right]$$

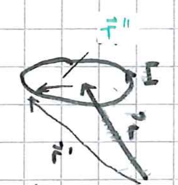
$$= Q\, (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{E}(\vec{r}) + \mathcal{O}(a^3)$$

$$\curvearrowright \quad \boxed{\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{E}} \qquad (\neq \vec{p}\, (\vec{\nabla} \vec{E})\ !)$$

Drehmoment: $\vec{M} = Q\left(\frac{\vec{a}}{2} \times \vec{E}(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}) + \frac{\vec{a}}{2} \times \vec{E}(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}) \right) = Q\, \vec{a} \times \vec{E}$

$$\curvearrowright \quad \boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

7.2. Magnetischer Dipol



Leiterschleife

Kraft: $\vec{F} = \int dV'\, \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}')$

$$= I \oint d\vec{r}' \times \vec{B}(\vec{r}') \qquad (= 0 \text{ für homogenes Feld})$$

$$= I \oint d\vec{r}' \times \vec{B}(\vec{r} + \vec{r}'')$$

Entwickeln $|\vec{r}''| \ll |\vec{r}|$

$$= I \underbrace{\oint d\vec{r}' \times \left[\vec{B}(\vec{r})\right.}_{0} \left. + \left(\vec{r}'' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) \vec{B}(\vec{r}) \right]$$

$$= I \oint d\vec{r}' \left(\vec{r}'' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) \times \vec{B}(\vec{r})$$

Integration $\oint d\vec{r}' \,(\vec{r}'' \cdot \vec{a}) = \oint d\vec{r}' \,(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{a} \overset{\text{siehe Kap 4.3}}{=} \frac{1}{2} \oint (\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{a} + \frac{1}{2} \oint d(\vec{r}'(\vec{r}'\vec{a}))$

($\oint d\vec{r}'\, \vec{r} \cdot \vec{a} \to 0$)

$$= \vec{A}_F \times \vec{a}$$

$$\curvearrowright \quad \vec{F} = I \cdot \left(\vec{A}_F \times \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) \times \vec{B} = (\vec{m} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{m}\, \vec{B}) - \vec{m}\, \underbrace{(\vec{\nabla} \vec{B})}_{=0 \text{ Maxwell}}$$

$$\curvearrowright \quad \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

Umformen $\vec{m} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{B})}_{\mu_0 \vec{j} \to 0 \text{ außerhalb Quellen}} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = 0$

und $\dot{\vec{E}} = 0$

$$\curvearrowright \quad \boxed{\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{B}} \qquad (\text{nur für } \vec{j}_{ext} = 0)$$

(vgl. elektr. Dipol $\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$)

Drehmoment: $\vec{M} = \int dV' \; \vec{r}'' \times [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}')]$

$$= I \oint \vec{r}'' \times (d\vec{r}' \times \vec{B}(\vec{r}'))$$

$$= I \oint d\vec{r}' \, (\vec{r}'' \cdot \vec{B}(\vec{r}')) - I \oint (d\vec{r}' \cdot \vec{r}'')\, \vec{B}(\vec{r}')$$

Nähern w.o. $\vec{B}(\vec{r}') \simeq \vec{B}(\vec{r})$

Umformen $\oint d\vec{r}' \cdot \vec{r}'' = \oint d\vec{r}' \cdot (\vec{r}' - \underset{0}{\underset{\downarrow}{\vec{r}}}) = \oint d\vec{r}' \cdot \vec{r}' = \oint \frac{1}{2} d(\vec{r}'^2) = 0$

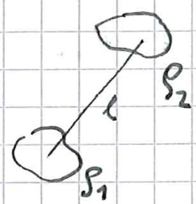
$$\oint d\vec{r}' (\vec{r}' \cdot \vec{a}) = \vec{A}_F \times \vec{a}$$

$$\curvearrowright \quad \boxed{\vec{M} = I\, \vec{A}_F \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}(\vec{r})}$$

(vgl. el. Dipol $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$)

7.3. Multipolentwicklung der elektrischen WW-Energie

$$W_e = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int dV dV' \frac{(\rho_1(\vec{r}) + \rho_2(\vec{r}))(\rho_1(\vec{r}') + \rho_2(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



Wechselwirkungsenergie $1 \leftrightarrow 2$:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int dV dV' \frac{\rho_1(\vec{r})\,\rho_2(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int dV \, \rho_2 \, \varphi_1$$

Uminterpretieren: ρ_1 erzeugt äußeres Potential $\varphi_{(1)}$, $\rho_2 = \rho$

$$\curvearrowright \quad \underline{W = \int dV \, \rho(\vec{r}) \, \varphi(\vec{r})}$$

(Energie einer Ladungsverteilung ρ im äußeren Potential φ)

Jetzt Entwickeln: $\varphi(\vec{r}) = \varphi(0) + \left(\vec{r} \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\varphi\Big|_0 + \frac{1}{2} x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi \Big|_0$

(φ um Ursprung)

$$\curvearrowright \quad W = \int dV\, \rho(\vec r) \left[\varphi(0) + \left(\vec r \cdot \frac{\partial}{\partial \vec r}\right) \varphi \Big|_0 + \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi \Big|_0 \right]$$

$$= Q\, \varphi(0) + \vec p \cdot \frac{\partial}{\partial \vec r} \varphi \Big|_0 + \frac{1}{6} \sum_{ij} \left(D_{ij} + \delta_{ij} \int dV \rho r^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi \Big|_0$$

$$D_{ij} = \int dV \rho \left(3 x_i x_j - \delta_{ij} r^2 \right)$$

Umformen: $\delta_{ij} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \Delta \varphi = - \dfrac{\rho_1}{\varepsilon_0} = 0$ für $r = 0$!

$\curvearrowright$ Energie $\boxed{W = Q\, \varphi(\vec r) + \vec p \cdot \vec\nabla \varphi + \frac{1}{6} \left(\vec\nabla \cdot \hat D \cdot \vec\nabla \right) \varphi}$ $\quad \vec r$ = Ort von $\rho(\vec r)$

Verschieben der Ladungsverteilung $\vec r \to \vec r + \delta \vec r$ (Bezugspunkt für $\vec p$, $\hat D$ unverändert)

Arbeit $\delta A = \vec F \cdot \delta \vec r = - \delta W \quad \curvearrowright \quad \vec F = - \dfrac{\partial W}{\partial \vec r}$

$$\vec F = - Q \frac{\partial \varphi}{\partial \vec r} - \frac{\partial}{\partial \vec r} \left(\vec p \frac{\partial}{\partial \vec r} \varphi \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial}{\partial \vec r} \hat D \frac{\partial}{\partial \vec r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \vec r}$$

$\curvearrowright$ Kraft $\boxed{\vec F = Q \vec E + (\vec p \cdot \vec\nabla) \vec E + \frac{1}{6} \left(\vec\nabla \cdot \hat D \cdot \vec\nabla \right) \vec E}$

Drehen der Ladungsverteilung um $\vec r$ mit Winkel $\delta \vec\alpha$

Arbeit $\delta A = \vec M \cdot \delta \vec\alpha = - \delta W$, $\vec M = - \dfrac{\partial W}{\partial \vec \alpha}$

Änderungen $\delta Q = 0$, $\delta \vec p = \delta \vec\alpha \times \vec p$, $\delta \hat D = \delta \vec\alpha \times \hat D - \hat D \times \delta \vec\alpha$

(Dipol: $\vec p = Q \vec a$, $\delta \vec a = \delta \vec\alpha \times \vec a$

Quadrupol: $\hat D = \vec A \circ \vec B$, $\delta \vec A = \delta \vec\alpha \times \vec A$, $\delta \vec B = \delta \vec\alpha \times \vec B = - \vec B \times \delta \vec\alpha$

$\delta \hat D = \delta \vec A \circ \vec B + \vec A \circ \delta \vec B = \delta \vec\alpha \times \hat D - \hat D \times \delta \vec\alpha$)

$$\curvearrowright \quad W + \delta W = Q \varphi + (\vec p + \delta \vec p) \frac{\partial \varphi}{\partial \vec r} + \frac{1}{6} \left(\vec\nabla \cdot (\hat D + \delta \hat D) \vec\nabla \right) \varphi$$

$$\delta W = \delta \vec p \frac{\partial \varphi}{\partial \vec r} + \frac{1}{6} \left(\vec\nabla \cdot \delta \hat D \cdot \vec\nabla \right) \varphi$$

$$= - (\delta \vec\alpha \times \vec p) \vec E - \frac{1}{6} \vec\nabla \left(\delta \vec\alpha \times \hat D - \hat D \times \delta \vec\alpha \right) \vec E$$

$\curvearrowright$ Drehmoment $\boxed{\vec M = \vec p \times \vec E + \frac{1}{6} \vec\nabla \cdot \hat D \times \vec E - \frac{1}{6} \vec\nabla \times \hat D \vec E}$

Achtung: Gleiche Prozedur für magnetischen Fall (Kraft/Drehmoment aus Änderung der Feldenergie) liefert falsches Vz!
(Ursache: zusätzliche Energie aus Spannungsquellen durch Induktion)