8. Felder zeitabhängiger Strom- und Ladungsverteilungen

Jetzt allgemeine Lösung von
$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{div}\vec{B} = 0 & \varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E} = \rho \\ \operatorname{rot}\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 & \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B} - \varepsilon_0\dot{\vec{E}} = \vec{j} \end{array}}$$

8.1. Viererpotential

$\operatorname{div}\vec{B} = 0$ wird erfüllt mit $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$.

$\operatorname{rot}\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$ führt auf $\operatorname{rot}(\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0$.

Dies kann erfüllt werden (siehe E. Statik) mit $\vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\operatorname{grad}\varphi$

$\curvearrowright$ Felder können ausgedrückt werden durch Viererpotential $(\varphi, \vec{A})$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \\ \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \dot{\vec{A}} \end{array}}$$

$\curvearrowright$ i.a. 4 Felder zu bestimmen

Einsetzen in Maxwell: $\quad \Box = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$
$$-\Delta\varphi - \operatorname{div}\dot{\vec{A}} = \rho/\varepsilon_0$$
$$\Box\varphi - \partial_t\left(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\dot{\vec{E}} = \mu_0\vec{j}$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\operatorname{grad}\dot{\varphi} + \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = \mu_0\vec{j}$$
$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{\nabla}\varphi = \mu_0\vec{j}$$
$$\Box\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = \mu_0\vec{j}$$

Eichinvarianz: Potentiale nicht eindeutig

Trafo
$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}\chi \\ \varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi - \partial_t\chi \end{array}}$$

$\curvearrowright$ $\vec{B} = \vec{B}'$ $\quad(\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0)$

$\vec{E}' = \vec{E} + \operatorname{grad}\partial_t\chi - \partial_t\operatorname{grad}\chi = \vec{E}$

Gleichzeitige Umeichung von $\vec{A}$ und χ läßt Felder unverändert.

Eichtrafo hat eine willkürliche skalare Fkt χ $\curvearrowright$ Eichung darf eine skalare Bedingung enthalten.

Hier günstig

Lorenz-Eichung: $\boxed{\frac{1}{c^2}\partial_t \varphi + \mathrm{div}\,\vec{A} = 0}$ (invariant unter Lorentz-Trafo ↝ geeignet für relativistische Probleme)

Mit Lorentz-Eichung lauten die Gleichungen für die Felder:

$$\boxed{\Box \varphi = \rho/\varepsilon_0 \quad , \quad \Box \vec{A} = \mu_0 \vec{j}}$$

Statische Probleme: $\partial_t \to 0$, $\Box \to \Delta$

$-\Delta\varphi = \rho/\varepsilon_0$ E. Statik, Kap 3, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

$-\Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j}$ Stat. Ströme, Kap 4, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

<u>Wichtige Eichungen:</u>

a) Lorenz (*) $\quad {}^1/_{c^2}\,\partial_t\varphi + \mathrm{div}\,\vec{A} = 0 \quad \curvearrowright \quad \Box\varphi = \rho/\varepsilon_0, \quad \Box\vec{A} = \mu_0\vec{j}$

b) Coulomb $\quad \mathrm{div}\,\vec{A} = 0 \quad \curvearrowright \quad -\Delta\varphi = \rho/\varepsilon_0, \quad \Box\vec{A} = \mu_0\vec{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial\vec{r}}$

(für E-Statik und Korrekturen)

c) Transversale Wellen $\quad \varphi = 0 \quad \curvearrowright \quad \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} + \mathrm{rot\,rot}\,\vec{A} = \mu_0\vec{j}, \quad -\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t\,\partial\vec{r}} = \rho/\varepsilon_0$

(*) Lorenz-Eichung fixiert Potentiale noch nicht, Umeichungen mit $\Box\chi = 0$ noch möglich.

8.2. Retardierte Potentiale

Inhomogene lineare! Dgl der Form $\Box u = \rho$

kann gelöst werden mittels Greenscher Fkt $\Box G(\vec{r},t;\vec{r}',t') = \vec{r}' 4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')$

Dazu Fourier-Transformation $t \to \omega$:

$$u(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\vec{r},t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

$$u(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

Wegen Translationsinvarianz wird $G(\vec{r},t;\vec{r}',t')$ nur von $\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}'$, $\tau = t - t'$ abhängen;

wg. Rotationssymmetrie nur von $|\vec{R}|$.

Dann wird aus $\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right) G(\vec r,t;\vec r',t') = 4\pi\,\delta(\vec r-\vec r')\,\delta(t-t')$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \vec R^2} - \frac{1}{c^2}(i\omega)^2\right) G(\vec R,\omega) = -4\pi\,\delta(\vec R)$$

$\frac{\omega}{c} \equiv k$, Kugelkoord.: $\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2} R G_k(R) + k^2 G_k(R) = -4\pi\,\delta(\vec R)$

Für alle $\vec R \neq 0$ haben wir die homogene Gleichung $\frac{d^2}{dR^2}(RG_k) + k^2 (RG_k) = 0$,

mit der Lösung $RG_k(R) = A e^{ikR} + B e^{-ikR}$ (k, R Skalare!)

Die Inhomogenität $\delta(\vec R)$ ist wichtig nahe $\vec R = 0$. Dort ist der $k^2 R G_k$ -Term vernachlässigbar wegen $kR \ll 1$. Die Gleichung reduziert sich damit auf die Poisson-Gl. $\Delta G_k(\vec R) = -4\pi\delta(\vec R)$, d.h.

$$\lim_{kR\to 0} G_k(\vec R) = \frac{1}{R}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung für G:

$$G_k(R) = A G_k^+(R) + B G_k^-(R), \quad G_k^\pm(R) = \frac{e^{\pm ikR}}{R}, \quad A+B=1$$

Jetzt Fourier-Trafo zurück $\omega \to t$:

$$G^\pm(\vec R,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{-i\omega\tau}\, d\omega \qquad \left(k=\frac{\omega}{c}\right)$$

$$= \frac{1}{R}\,\delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right)$$

oder $$G^\pm(\vec r,t;\vec r',t') = \frac{\delta\left(t' - \left(t \mp \frac{|\vec r-\vec r'|}{c}\right)\right)}{|\vec r-\vec r'|}$$

Der Unterschied zwischen G^+ und G^- liegt in der Randbed. in der Zeit:
G beschreibt Reaktion des Systems bei $(\vec r,t)$ auf Störung (Inhom.) bei $(\vec r',t')$.
Kausalität erfordert $G(t<t') = 0$. δ-Fkt $\neq 0$ bei $t' = t \mp \frac{|\vec r-\vec r'|}{c}$.
↷ Kausalität wird erfüllt von G^+ („retardierte Greensche Fkt"): Wirkung nach Ursache; breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus: $\tau = R/c$.
G^- heißt „avancierte Greensche Funktion"

Die Lösung der inhomogenen Dgl. $\Box u = \rho$ ist damit

$$u(\vec r, t) = \underbrace{u_0(\vec r, t)}_{\text{homogene Lsg}} + \frac{1}{4\pi}\int dV' dt' \; G^+(\vec r, t; \vec r', t')\, \rho(\vec r', t')$$

Jetzt zurück zu $\Box \varphi = \rho/\varepsilon_0$, $\Box \vec A = \mu_0 \vec j$. Für eine räumlich begrenzte Verteilung von Quellen (und damit Felder $\to 0$ im Unendlichen) brauchen wir $\varphi_0 = 0$, $\vec A_0 = 0$ (homogene Lsg).

$\rightsquigarrow$ Allg. Lsg der Maxwell-Gl. lauten:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(\vec r, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int dV' \; \frac{\rho\left(\vec r', t - \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}\right)}{|\vec r - \vec r'|} \\ \vec A(\vec r, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \; \frac{\vec j\left(\vec r', t - \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}\right)}{|\vec r - \vec r'|} \end{aligned}}$$

"Retardierte Potentiale"

Interpretation klar: $\rho, \vec j$ als Ursache, $\varphi, \vec A$ als Wirkung, $\frac{|\vec r - \vec r'|}{c}$ als Laufzeit

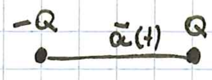
Rechenübung:
- Einsetzen $\Box \varphi = \rho/\varepsilon_0$, $\Box \vec A = \mu_0 \vec j$ erfüllt.
- Lorentz-Eichung $\frac{1}{c^2}\partial_t \varphi + \operatorname{div} \vec A = 0$ erfüllt.
  (Dies führt auf $\dot\rho + \operatorname{div} \vec j = 0$!)

Bem.: Avancierte Potentiale mit G^-, d.h. $t' = t + \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}$, erfüllen auch die inhom. Wellengl. $\Box \varphi = \rho/\varepsilon_0$, $\Box \vec A = \mu_0 \vec j$.
(Mathematisch: Wellengl. enthält c quadratisch, Potential nur linear)
Diese Lösung ist akausal.
Wahl von G^+ zeichnet eine Zeitrichtung aus!

8.3. Hertzscher Dipol

Konkretes Beispiel für zeitabhängige Quellenverteilung

mit $\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{J}(t)\,\delta(\vec{r})$ (~ Antenne)



$$\vec{j} = \dot{\vec{a}}\, Q\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

Dipollimit $a \to 0$

$$\vec{j} = \dot{\vec{p}}\,\delta(\vec{r}) \quad (!)$$

Allgemein gilt $\vec{J}(t) = \int dV\, \vec{j}(\vec{r},t) = \dot{\vec{p}}$,

denn:

$$\dot{\vec{p}} = \int dV\, \vec{r}\,\dot{\rho} \overset{\text{Kont.gl.}}{=} -\int dV\, \vec{r}\,\operatorname{div}\vec{j} \overset{\text{p.I.}}{=} \int dV\, (\vec{j}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{r} + \text{Oberflächenintegral}$$

Oberflächenintegral $\to 0$ für $V \to \infty$

$$\overset{\vec{\nabla}\circ\vec{r} = 1}{=} \int dV\, \vec{j}\, 1 = \vec{J}$$

Ziel: Berechnen der Felder (el.mag. Abstrahlung) des oszillierenden Dipols

Ret. Pot:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\, \frac{\delta(\vec{r}')\,\vec{J}\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r}$$

φ entweder Ableiten aus Ladungsverteilung zu $\vec{j}$ oder aus Lorenz-Eichung.

$$\partial_t \varphi = -c^2\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\vec{\nabla}\cdot\frac{\dot{\vec{p}}(t-r/c)}{r}$$

$$\leadsto \varphi(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\vec{p}(t-r/c)}{r} + \text{zeitunabh. Pot}$$

Felder:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \dot{\vec{A}}, \qquad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\dot{\vec{p}}}{r}\Big|_{\text{ret}}, \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r}\cdot\left(\frac{\vec{p}}{r^2} + \frac{\dot{\vec{p}}}{cr}\right)_{\text{ret}}$$

$$\leadsto \vec{B} = \frac{\vec{r}}{r}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial r} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{r}}{r^2}\times\left(\frac{\ddot{\vec{p}}}{c} + \frac{\dot{\vec{p}}}{r}\right)_{\text{ret}}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2} - \frac{(\ddot{\vec{p}}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{c^2 r^2} + \frac{\dot{\vec{p}}}{cr} - 3\,\frac{(\dot{\vec{p}}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{c r^3} + \frac{\vec{p}}{r^2} - 3\,\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{r^4}\right)_{\text{ret}}$$

Bis jetzt war Zeitabhängigkeit allgemein. Spezialfälle:

(a) $\partial_t = 0$ Statischer Dipol $\curvearrowright$

$$\vec{B} = 0$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{p} - \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2}\right) \quad //$$

(b) $\vec{p} \sim e^{-i\omega t}$ Harmonische Schwingung

$$\partial_t = -i\omega \,, \quad \tfrac{1}{c}\,\partial_t = -i\omega/c =: -i\,\frac{2\pi}{\lambda} \qquad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

Abstandsabhängigkeiten der Beiträge:

$$\vec{B} \sim -\frac{\mu_0 \vec{r}}{4\pi r^2} \times \left(\mathcal{O}(\dot{p}/\lambda) + \mathcal{O}(\dot{p}/r) \right)$$

$$\vec{E} \sim -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \left(\mathcal{O}(p/\lambda^2) + \mathcal{O}(p/r\lambda) + \mathcal{O}(p/r^2) \right)$$

„Nahfeld" $r \ll \lambda$:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\left(\dot{\vec{p}} \times \frac{\vec{r}}{r}\right)_{ret}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right)_{ret}$$

Außerdem: $\vec{p}_{ret} \sim e^{-i\omega(t - r/c)} = e^{-i\omega t}\,\underbrace{e^{i 2\pi \frac{r}{\lambda}}}_{1 + 2\pi i \frac{r}{\lambda} + \dots}$

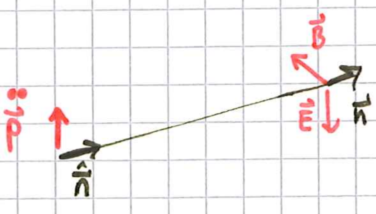
$$\frac{r}{\lambda} \ll 1 \;\curvearrowright\; e^{i 2\pi r/\lambda} \simeq 1 \;\hat{=}\; \text{Verzicht auf Retardierung}$$

„Fernfeld" $r \gg \lambda$ $\quad \left(\frac{\vec{r}}{r} = \hat{n}\right)$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r c}\left(\ddot{\vec{p}} \times \hat{n}\right)_{ret}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left((\ddot{\vec{p}}\cdot\hat{n})\hat{n} - \ddot{\vec{p}}\right)_{ret} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left(\ddot{\vec{p}} \times \hat{n}\right)_{ret} \times \hat{n}$$

$$\curvearrowright \; \vec{E}(\vec{r},t) = c\,\vec{B} \times \hat{n}$$



Ausbreitung in Richtung $\hat{n}$ radial als transversale Welle.

$$e^{-i\omega(t - r/c)} = e^{i(kr - \omega t)} \,, \quad k = \omega/c \,.$$

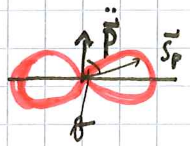
$|\vec{E}|$ und $|\vec{B}|$ fallen nur mit $\boxed{1/r}$ ab!!

8.4. Energieabstrahlung eines Hertzschen Dipols

Energiedichte: $w = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 \overset{\vec{E}=c\vec{B}\times\vec{n}}{=} \vec{B}^2/\mu_0$

Energiestromdichte: $\vec{S}_p = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{c}{\mu_0}\left((\vec{B}\times\vec{n})\times\vec{B}\right) = \frac{c}{\mu_0}\left(\vec{n}\vec{B}^2 - \vec{B}(\underbrace{\vec{n}\vec{B}}_{0})\right) = c\vec{n}w$

$\curvearrowright$ $$\vec{S}_p = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c}\frac{(\ddot{\vec{p}}\times\vec{n})^2}{r^2} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c}\frac{\ddot{\vec{p}}^2\sin^2\vartheta}{r^2}$$



! Stärkste Ausstrahlung $\perp$ Dipolachse !

Energiestrom in Raumwinkelelement: (Energiestrom = Energie/Zeit = Leistung)

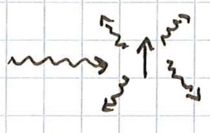
$|\vec{S}_p|\cdot A \sim \frac{1}{r^2}\cdot r^2 \sim 1$ wg. $|\vec{E}|, |\vec{B}| \sim \frac{1}{r}$

$\curvearrowright$ $|\vec{E}|, |\vec{B}| \sim \frac{1}{r}$ folgt aus Energieerhaltung!

Frequenzabhängigkeit der abgestrahlten Leistung

$|\vec{S}_p| \sim |\ddot{\vec{p}}^2| \sim p^2\omega^4$ Charakteristisch für Dipolstrahlung

z.B. $\boxed{\text{Rayleigh-Streuung}}$: erzwungene Schwingung eines Dipols (z.B. optisch)



Sonnenlicht in Atmosphäre: Streuung stark für blaues Licht

$\curvearrowright$ Himmel blau (indirektes Streulicht)

$\curvearrowright$ Sonne abends rot (blauer Anteil weggestreut, da Luftschicht dick)

Abgestrahlte Leistung

$$N = \iint d\vec{A}_F\,\vec{S}_p = \int d\Omega\, r^2 \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c}\ddot{p}_{ret}^2\frac{\sin^2\vartheta}{r^2} = \frac{\mu_0\ddot{p}_{ret}^2}{(4\pi)^2 c}\int d\Omega\sin^2\vartheta$$

Integral: $\int d\Omega \sin^2\vartheta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta\sin^2\vartheta = 2\pi\int_{-1}^{1} d\cos\vartheta\,(1-\cos^2\vartheta) = 2\pi\left(2-\frac{2}{3}\right)$

$\curvearrowright$ $$N = \frac{2}{3}\frac{\mu_0}{4\pi c}\ddot{p}_{ret}^2$$

Zeitmittel: $$\boxed{\overline{N} = \frac{\mu_0\,\omega^4\,\vec{p}_0^{\,2}}{12\pi c}}$$

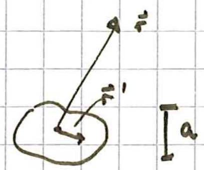
$\vec{p} = \vec{p}_0\cos\omega t$

$\left(\overline{\ddot{\vec{p}}^2} = \omega^4\,\vec{p}_0^{\,2}\,\overline{\cos^2\omega t}\right)$

8.5. Strahlungsfeld einer räumlich begrenzten Quellenverteilung

(Ziel: Verallgemeinerung der Gl. für Hertzschen Dipol für bel. Quelle)

Allg.: $$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$



Fernfeld: $r \gg a$, $|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|$

(Bei Hertzschem Dipol war $a \to 0$.)

Entwickeln: $$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3} + \ldots \approx \frac{1}{r}$$ ($\sim$ Dipolnäherung)

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r} + \ldots \approx r - \hat{\vec{n}}\cdot\vec{r}\,'$$ ($\hat{\vec{n}} = \vec{r}/r$)

$\sim$ $$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \underbrace{\int dV' \, \vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\vec{n}}\cdot\vec{r}\,'}{c}\right)}_{= \dot{\vec{q}}\left(t - \frac{r}{c}, \hat{\vec{n}}\right)}$$

(Vgl. Hertzscher Dipol $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(t - r/c)$)

$\sim$ $$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c}, \hat{\vec{n}}\right)}{r}$$ $(r \gg a)$

$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$: $$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left[\frac{1}{r} f\left(t-\frac{r}{c}, \hat{\vec{n}}\right)\right] = \left[-\frac{\hat{\vec{n}}}{c}\partial_t - \frac{\hat{\vec{n}}}{r} + \partial_{\vec{r}}\left(\hat{\vec{n}} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{\vec{n}}}\right)\right]\left(\frac{1}{r} f\right) \overset{(*)}{\simeq} -\frac{\hat{\vec{n}}}{c}\partial_t\left(\frac{1}{r} f\right)$$

Wie Hertz: $r \gg \lambda$ — $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$, $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$

$\sim$ $$\vec{B} = -\frac{\hat{\vec{n}}}{c} \times \dot{\vec{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{\vec{q}} \times \hat{\vec{n}}}{r}$$

$\vec{E}$: $$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}, \quad \vec{j} = 0 \text{ außerhalb Quelle}$$

$$\dot{\vec{E}} = c^2 \operatorname{rot} \vec{B} \overset{(*)}{\simeq} -\frac{\hat{\vec{n}}}{c} \partial_t \times c^2 \vec{B}$$

$\sim$ $$\vec{E} = c\, \vec{B} \times \hat{\vec{n}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\ddot{\vec{q}} \times \hat{\vec{n}}) \times \hat{\vec{n}}}{r}$$

Transversale Welle

E, B Abfall mit $\frac{1}{r}$

(Korrekturen aus höheren Termen fallen schneller als $1/r$ ab!)

Weiter:
$$\vec S_p = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec E \times \vec B\right) = \hat{n}\,\frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c}\,\frac{\left(\ddot{\vec q} \times \hat n\right)^2}{r^2}$$

$\boxed{\text{Vgl:}}$

<u>Hertzscher Dipol</u>

$$\dot{\vec p}_{ret} = \int dV'\, \vec j\left(\vec r', t - \frac{r}{c}\right)$$

<u>allg</u>

$$\dot{\vec q} = \int dV'\, \vec j\left(\vec r', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat n \cdot \vec r'}{c}\right)$$

Laufzeit innerhalb der Quelle

Mit $\dot{\vec p} \leftrightarrow \dot{\vec q}$ sind alle Fernfeld-Formeln identisch!

8.6. Multipolentwicklung des Fernfeldes

Bis jetzt Zeitabhängigkeit allgemein. Jetzt:

$$\vec j \sim e^{-i\omega t} \qquad \vec j\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat n \cdot \vec r'}{c}\right) \sim e^{-i\omega\left(t - r/c\right)}\, e^{-\frac{i\omega}{c}\hat n \cdot \vec r'}$$

Fernfeldentwicklung ($r \gg a$, $r \gg \lambda$) mit zusätzlicher Annahme $\lambda \gg a$ (kleine Quelle).

Also: $\frac{\omega}{c}\,\hat n \cdot \vec r' \sim \frac{\omega}{c}\, a = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1$ (äquivalent: Laufzeit in Quelle $\ll$ Periodendauer)

$$\leadsto \quad \vec j\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat n \cdot \vec r'}{c}\right) = \vec j\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\hat n \cdot \vec r'}{c}\,\partial_t\, \vec j\left(t - \frac{r}{c}\right) + \dots$$

$$\leadsto \quad \dot{\vec q} = \underbrace{\int dV'\, \vec j\left(\vec r', t - \frac{r}{c}\right)}_{\dot{\vec p}_{ret}} + \frac{1}{c}\,\partial_t \int dV'\, \left(\hat n \cdot \vec r'\right) \vec j\left(\vec r', t - r/c\right)$$

Umformen:
$$\int dV'\, \left(\hat n \cdot \vec r'\right) \vec j = \frac{1}{2}\int dV'\, \left(\hat n \cdot \vec r'\right)\vec j - \left(\hat n \cdot \vec j\right)\vec r' + \frac{1}{2}\int dV'\, \left(\hat n \cdot \vec r'\right)\vec j + \left(\hat n \cdot \vec j\right)\vec r'$$
$$= -\hat n \times \underbrace{\frac{1}{2}\int dV'\, \left(\vec r' \times \vec j\right)}_{\vec m} + \frac{\hat n}{2} \cdot \frac{1}{3}\, \dot{\overleftrightarrow{D}}$$

Blatt 8-9b

denn:
$$\dot{\overleftrightarrow{D}} = \int dV\, \underbrace{\dot\rho}_{-\vec\nabla \vec j} \left(3\vec r \otimes \vec r - \mathbb{1} r^2\right) \overset{\text{p.I.}}{=} \int dV\, \left(\vec j \cdot \vec\nabla\right)\left(3\vec r \otimes \vec r - \mathbb{1} r^2\right)$$
$$= \int dV\, \left(3\,\vec j \otimes \vec r + 3\,\vec r \otimes \vec j - 2\cdot\mathbb{1}\left(\vec j \cdot \vec r\right)\right) \quad (*)$$

Wir definieren $\overset{\leftrightarrow}{D}' = \overset{\leftrightarrow}{D} + \mathbb{1} \frac{Sp \overset{\leftrightarrow}{D}'}{3} = \int dV \, \rho \, 3 \vec{r} \otimes \vec{r}$ $\qquad \overset{\leftrightarrow}{D} = \int dV \rho \left(3 \vec{r} \otimes \vec{r} - \mathbb{1} r^2\right)$

$\curvearrowright \quad \dot{\overset{\leftrightarrow}{D}}{}' = \int dV \left(3 \, \vec{j} \otimes \vec{r} + 3 \vec{r} \otimes \vec{j}\right)$

(*) in Komponenten (Tensor 3. Stufe):

$$\left[(\vec{j} \cdot \vec{\nabla})\left(3 \vec{r} \otimes \vec{r} - \mathbb{1} r^2\right)\right]_{ij} = j_k \partial_k \left(3 r_i r_j - \delta_{ij} r_e r_e\right)$$

$$= j_k \left(3 \delta_{ik} r_j + 3 r_i \delta_{jk} - \delta_{ij} 2 r_e \delta_{ek}\right)$$

$$= 3 j_i r_j + 3 r_i j_j - \delta_{ij} 2 j_k r_k$$

Außerdem brauchen wir:

$$\left[(\vec{m} \times \hat{\vec{n}}) \times \hat{\vec{n}}\right] \times \hat{\vec{n}} = \left[\hat{\vec{n}}(\vec{m} \cdot \hat{\vec{n}}) - \vec{m} \underbrace{(\hat{\vec{n}} \cdot \hat{\vec{n}})}_{1}\right] \times \hat{\vec{n}} = -\vec{m} \times \hat{\vec{n}}$$

Und:

$$\hat{\vec{n}} \cdot \overset{\leftrightarrow}{D}' \times \hat{\vec{n}} = \hat{\vec{n}} \cdot \overset{\leftrightarrow}{D} \times \hat{\vec{n}} + \underbrace{\hat{\vec{n}} \, \mathbb{1} \times \hat{\vec{n}}}_{\vec{n} \times \vec{n} = 0} \frac{Sp \overset{\leftrightarrow}{D}'}{3} = \hat{\vec{n}} \, \overset{\leftrightarrow}{D} \times \hat{\vec{n}}$$

$$\leadsto \quad \dot{\vec{d}} = \left(\dot{\vec{p}} + \dot{\vec{m}} \times \frac{\hat{n}}{c} + \frac{\hat{n}}{6c} \cdot \ddot{\vec{D}} \right)_{ret}$$

hm!

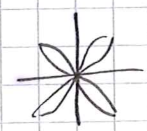
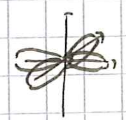
$$\leadsto \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \left(\ddot{\vec{p}} \times \hat{n} + \frac{1}{c} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{n}) \times \hat{n} + \frac{1}{6c}\, \hat{n} \cdot \dddot{\vec{D}} \times \hat{n} \right)_{ret}$$

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left((\ddot{\vec{p}} \times \hat{n}) \times \hat{n} - \frac{1}{c} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{n}) + \frac{1}{6c} (\hat{n} \cdot \dddot{\vec{D}} \times \hat{n}) \times \hat{n} \right)_{ret}$$

($a/\lambda \ll 1$) el. Dipol mag. Dipol el. Quadrupol

Entwicklung in a/λ: Felder von mag Dipol & el. Quadrupol kommen eine Ordnung später als el. Dipol, sind also um $\frac{a}{\lambda}$ kleiner !!
(Energien damit um a^2/λ^2 kleiner)
(aber alle $\propto 1/r$)

Richtungsabh. der Felder (und damit auch von $|\vec{S}_{pl}|$):

Dipol  Quadrupol  od. 

Die obigen Formeln sind im Prinzip auch anwendbar auf

Einzelne bewegte Punktladung:

a  Zeitskala $\tau = \frac{a}{v}$; $\frac{a}{\lambda} \ll 1 \;\hat{=}\; \frac{v}{c} \ll 1$ $\left(\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \right)$

Bsp.: Atom $a \sim 10^{-10} - 10^{-9}$ m
$\lambda \sim 5 \cdot 10^{-7}$ m (opt) $\leadsto \frac{a}{\lambda} \sim 10^{-3}$

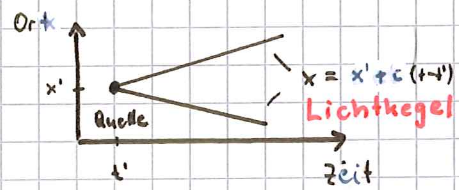
8.7. Strahlung einer bewegten Punktladung

Retardierte Potentiale
$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \vec{A}\end{pmatrix}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix}1/\varepsilon_0\\ \mu_0\end{pmatrix}\int dV' \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\begin{pmatrix}\rho\\ \vec{j}\end{pmatrix}\left(\vec{r}\,', t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)$$

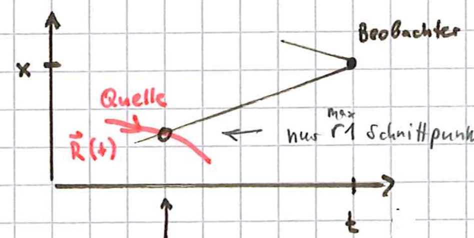
für Spezialfall einer bewegten Punktladung
$$\rho(\vec{r},t) = Q\,\delta(\vec{r}-\vec{R}(t))$$
$$\vec{j}(\vec{r},t) = Q\dot{\vec{R}}(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{R}(t))$$

Einsetzen $\curvearrowright$
$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'dt' \frac{\delta(\vec{r}\,'-\vec{R}(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}\,\delta\Big(\underbrace{t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c}}_{*}\Big)$$

Anschaulich: Ausbreitung mit c



Hier:



← nur max 1 Schnittpunkt da $|\vec{V}| < c$

$$t_0 = t - \frac{|\vec{r}-\vec{R}(t_0)|}{c}$$ (Nullstelle von (*))

Weiter mit Rechnung:
$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|\partial f/\partial x|_{x=x_i}}$$ (x_i = Nullstellen von f)

$$\curvearrowright\quad \varphi(\vec{r},t) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}(t_0)|}\frac{1}{1-\frac{\dot{\vec{R}}(t_0)\cdot(\vec{r}-\vec{R}(t_0))}{c\,|\vec{r}-\vec{R}(t_0)|}}$$

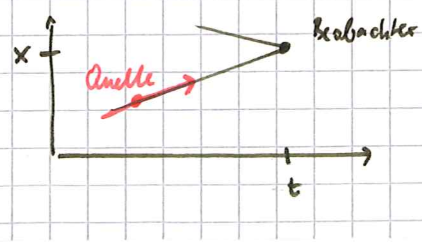
$$\curvearrowright\quad \varphi(\vec{r},t) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|-\frac{\dot{\vec{R}}}{c}\cdot(\vec{r}-\vec{R})}\right]_{ret} \overset{\vec{r}\,''=\vec{r}-\vec{R}}{\underset{\vec{V}=\dot{\vec{R}}}{=}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r''-\frac{\vec{V}\cdot\vec{r}\,''}{c}}\right)_{ret}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi}\left[\frac{\dot{\vec{R}}}{|\vec{r}-\vec{R}|-\frac{\dot{\vec{R}}}{c}(\vec{r}-\vec{R})}\right]_{ret} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi}\left(\frac{\vec{V}}{r''-\frac{\vec{V}\cdot\vec{r}\,''}{c}}\right)_{ret}$$

Liénard-Wiechert-Potentiale

ret — Lichtkegel t_0

Achtung: Divergenz (Nenner → 0) falls Quelle mit c auf Beobachter zubewegt wird



8.8. Strahlungsbremsung

(hier nur nichtrelativistische, siehe LL Bd 3)

Eine Punktladung auf Bahn $\vec{R}(t)$

$$\rho = Q\,\delta(\vec{r} - \vec{R}(t)) \qquad Q = \int dV\,\rho = Q$$

$$\vec{j} = Q\dot{\vec{R}}\,\delta(\vec{r} - \vec{R}(t)) \qquad \vec{p} = \int dV\,\vec{r}\rho = Q\,\vec{R}(t)$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int dV\,\vec{r}\times\vec{j} = \frac{1}{2}\int dV\,\vec{r}\times\dot{\vec{R}}\,Q\,\delta() = \frac{Q}{2}\vec{R}\times\dot{\vec{R}}$$

$$\dot{\overleftrightarrow{D}}' = 3\int dV\,(\vec{r}\otimes\vec{j} + \vec{j}\otimes\vec{r}) = 3Q\,(\vec{R}\otimes\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}}\otimes\vec{R})$$

(! Einzelne bewegte Punktladung hat Multipolmomente!)

Dipolnäherung für abgestrahlte Leistung (Kap 8.4):

$$N = \frac{\mu_0}{6\pi c}\ddot{\vec{p}}^{\,2} = \frac{\mu_0 Q^2\,\dot{\vec{v}}^{\,2}}{6\pi c} \quad (=: \alpha\,\dot{\vec{v}}^{\,2}) \quad (\text{Gültig für } v/c \ll 1,\ \text{siehe Dipol})$$

($\curvearrowright$ Energieabstrahlung für $\dot{\vec{v}} \neq 0$)

Diese abgestrahlte Energie geht dem Teilchen verloren! ($\curvearrowright$ Bremskraft)

$$\Delta W_{elm} = \int dt\,N = -\Delta W_{mech} = -\int \vec{F}_S\cdot\vec{v}\,dt$$

$$\alpha\int dt\,\dot{\vec{v}}^{\,2} = -\int dt\,\vec{v}\cdot\vec{F}_S$$

$$\overset{\text{p.I}}{=} -\alpha\int dt\,\ddot{\vec{v}}\,\vec{v} + \alpha\,\dot{\vec{v}}\,\vec{v}\Big|_{t_1}^{t_2}$$

Randterm verschwindet für period. Bewegung, siehe Diskussion LL

$$\curvearrowright \quad \boxed{\vec{F}_S = \alpha\,\ddot{\vec{v}} = \frac{Q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,\dddot{\vec{R}}}$$

(anwendbar, falls $\vec{F}_S$ kleine Korrektur ist)

Bsp Oszillierende Ladung $\vec{v} = \vec{v}_0\cos\omega t$, $\ddot{\vec{v}} = -\vec{v}\,\omega^2$ $\curvearrowright \vec{F}_S \uparrow\downarrow \vec{v}$

Drehbewegung $\dot{\vec{v}} = \vec{\omega}\times\vec{v}$, $\ddot{\vec{v}} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{v})$

Achtung Freie Bahn $m\ddot{\vec{R}} = \alpha\dddot{\vec{R}}$ $\curvearrowright$ $\vec{v} = \vec{v}_0\,e^{m/\alpha\, t}$ Unphysikalische Selbstbeschleunigung!