

# 9. Elektromagnetische Felder in Substanzen

Bisher: „Mikroskopische“ Maxwellgleichungen,  
 $\vec{g}$  und  $\vec{j}$  enthalten alle Quellen (dabei Mittelung auf atomarer Skala vorausgesetzt)

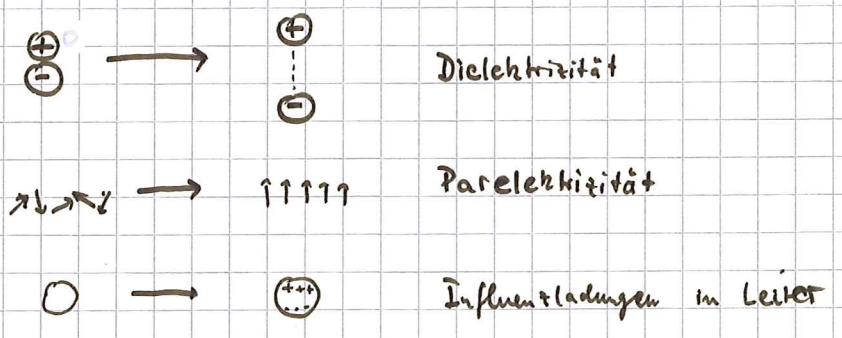
Jetzt: „Makroskopische“ Maxwellgleichungen,  
 dabei soll durch „größere“ Mittelungsverfahren zwischen (externen) makroskopischen Quellen und material-eigenen Quellen (Polarisationsladungen, Abschirmströme) unterschieden werden

Ausführliche Diskussion siehe Jackson Kap 7

## 9.1. Elektrische Polarisation

$\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{g}_p$   
 ↳  $\vec{g}_p$  = Polarisationsladung, durch äußeres Feld induziert (im Exp. nicht bekannt)  
 ↳  $\vec{g}_0$  = makroskopisch

Induzierte Ladungen:



$\vec{g}_p$  durch Ladungstrennung:  
 $\vec{g}_p(t=0) = 0 \rightarrow \vec{g}_p(t) \neq 0$   
 $Q_p = 0 \rightarrow \int dV \vec{g}_p = Q_p = 0$  (Ladungserhaltung)

↳  $\vec{g}_p + \text{div } \vec{j}_p = 0$   
 $\vec{g}_p = -\nabla \cdot \underbrace{\int_0^t dt' \vec{j}_p(t')}_{=: \vec{P}} + \underbrace{\vec{g}_p(0)}_{=0}$

Elektrische Polarisation

$$\vec{P} = \int \vec{j}_p dt$$

$$\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad Q_p = -\int dV \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\oint d\vec{A}_p \cdot \vec{P} = 0$$

$\uparrow$   
 $v \rightarrow 0$

Nun gilt:  $\int dV \vec{j}_p = \int dV \dot{\vec{P}} =: \dot{\vec{P}}_p$

Wir wissen (Kap 8): Strom  $\sim$   $d_e$  Dipolmoment. Also

„Polarisations dipol“

$$\vec{P}_p = \int dV \dot{\vec{P}}, \quad \dot{\vec{P}} \text{ ist Dipoldichte!}$$

Elektrisches Potential durch Polarisation:

$$\varphi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho_p(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \dot{\vec{P}}(\vec{r}')$$

$$\stackrel{\text{n.I.}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \dot{\vec{P}}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV \dot{\vec{P}}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Vgl. mit Dipolpotential:  $\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \dot{\vec{p}} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}$

$\leadsto \dot{\vec{P}}$  kann als Dipoldichte interpretiert werden:  $\dot{\vec{P}}(\vec{r}') dV' = d\dot{\vec{p}}$  ! ,  $\dot{\vec{P}} = \frac{d\dot{\vec{p}}}{dV}$

(Mikroskopisch: endliche Dipolgröße  $\dot{\vec{P}} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \dot{\vec{p}}_i$ )

In Maxwell:

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho = \rho_0 + \rho_p = \rho_0 - \operatorname{div} \vec{P}$$

$$\leadsto \operatorname{div} \underbrace{(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\vec{D}} = \rho_0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho_0$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{„elektrische Verschiebung“ (Hilfsfeld!)}$$

## 9.2. Magnetisierung

$$\vec{j} = \underbrace{\vec{j}_k + \vec{j}_e}_{\vec{j}_0} + \vec{j}_p + \vec{j}_m$$

Konvektion  $\rho \vec{v}$  (bewegtes Material)      Leitungsstrom      Polarisationsstrom  $\dot{\vec{P}}$  durch Ladungstrennung      Ströme ohne Ladungstrennung

Kontinuitätsgl.  $\dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$

$$\dot{\rho}_0 + \dot{\rho}_p + \operatorname{div} \vec{j}_0 + \operatorname{div} \vec{j}_p + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0$$

Einzelne Ladungsorte erfüllen Kontinuitätsgleichungen jeweils separat!

$$\dot{\rho}_0 + \operatorname{div} \vec{j}_0 = 0; \quad \dot{\rho}_p + \operatorname{div} \vec{j}_p = 0$$

Damit  $\operatorname{div} \vec{j}_m = 0$  (keine Ladungsträger!)

$\vec{j}_m =: \operatorname{rot} \vec{M}$        $\vec{M} \equiv$  **Magnetisierung**

Resultierendes Vektorpotential:

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{j}_m(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla_{\vec{r}'} \times \vec{M}(\vec{r}')$$

$$\stackrel{\text{P.I.}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Vgl. mit Dipolpotential:  $\vec{A}(\vec{r}) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{r}$

$\vec{M}$  kann als mag. Dipoldichte interpretiert werden  $\vec{M}(\vec{r}') dV' = d\vec{m}$

$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$        $\vec{M}$  mag. Dipoldichte

In Maxwell

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \vec{j}_0 + \dot{\vec{P}} + \operatorname{rot} \vec{M} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}$$

$\vec{H} = \operatorname{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_0 + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$

$\vec{H}$  ... Hilfsfeld!

Insgesamt:

$\text{div } \vec{J} = 0$	$\text{div } \vec{D} = \rho_0$
$\text{rot } \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$	$\text{rot } \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j}_0$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{bzw.} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$\vec{P}$  und  $\vec{M}$  beschreiben Materialeigenschaften.

### 9.3. Materialgesetze

$\vec{P}, \vec{M}, \vec{j}_L$  durch  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  hervorgerufen.

i. a.	$\vec{j}_L = \vec{j}_L(\vec{E}, \vec{D})$	}	material spezifisch,
	$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}, \vec{D}) \quad \text{bzw.} \quad \vec{D}(\vec{E}, \vec{P})$		einige Einschränkungen durch Thermodynamik
	$\vec{M} = \vec{M}(\vec{E}, \vec{D}) \quad \text{bzw.} \quad \vec{H}(\vec{E}, \vec{M})$		weitere Abh. (Temp, Druck, ...)

Häufig: einfache Gesetze (aus Exp oder theor. Modellen)

- 1)  $\vec{j}_L = \vec{j}_L(\vec{E}) = \sigma \vec{E}$
- 2)  $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (\chi \equiv \text{Suszeptibilität})$
- 3)  $\vec{M} = \vec{M}(\vec{B}) = \chi_m' \vec{B} / \mu_0$

↑ Taylor für schwache Felder (schwach  $\equiv$  klein gegen inneratomare Kräfte)

Physikalisch:

- 1) Ohmsches Gesetz  $I = A_F \vec{j} = A_F \sigma E = A_F \frac{U}{L} = \frac{U}{R} \quad ; \quad R = \frac{L}{A_F \sigma}$
- 2)  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad ; \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e$
- 3)  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = (1 - \chi_m') \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad \text{bzw.}$   
 $\vec{B} = \frac{\mu_0}{1 - \chi_m'} \vec{H} = \underbrace{\mu_r \mu_0}_{\mu} \vec{H} = (1 + \chi_m) \mu_0 \vec{H} \quad ; \quad \chi_m = \frac{\chi_m'}{1 - \chi_m'} \quad , \quad \mu_r = 1 + \chi_m$

Mit linearen Materialgesetzen folgt also:

$$\begin{array}{ll} \text{div } (\vec{D}, \vec{E}) = 0 & \text{div } \epsilon \vec{E} = \rho_0 \\ \text{rot } \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 & \text{rot } \frac{\vec{B}}{\mu} - \dot{\epsilon \vec{E}} = \vec{j}_0 \end{array}$$

Vgl. Maxwell im  
Vakuum

$$\rho \leftrightarrow \rho_0$$

$$\epsilon_0 \leftrightarrow \epsilon$$

$$\vec{j} \leftrightarrow \vec{j}_0$$

$$\mu_0 \leftrightarrow \mu$$

Homogenes Material:  $\epsilon, \mu$  vor  $\vec{\nabla} \leadsto$  wie Vakuum

! Materialien mit inhomogenem  $\epsilon$  oder  $\mu$  (insbesondere periodisch)

$\rightarrow$  Photonische Kristalle (Gitter für Licht) ! (nichttriviale Dispersion)

Phasengeschwindigkeit:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad \leadsto \quad c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c_0}{n}$$

$c_0$  Vakuum Lichtgeschwindigkeit

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad \text{Brechungsindex}$$

Energiedichte:

$$w = \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

Energiestromdichte:

$$\vec{s}_p = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Impulsdichte

$$\vec{g} = \epsilon \vec{E} \times \vec{B} = \vec{D} \times \vec{B} = \frac{1}{c_0^2} \vec{s}_p$$

Achtung: Ausdrücke mit Hilfsfeldern  $\vec{D}, \vec{H}$  nur richtig für lineare Materialgesetze!

Achtung II: Konvention ist, daß Energie mikroskopischer Ladungen zu Werten zählt.

$$\leadsto v = -\vec{j}_0 \cdot \vec{E} \quad (\text{daraus folgen } w \text{ und } \vec{s}_p)$$

Interpretation Kondensator:

$$\begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline \rightarrow \\ \hline + \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline - \\ \hline \\ \hline - \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

$$\text{vs} \quad \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline \ominus \ominus \\ \hline + \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline - \\ \hline \ominus \ominus \\ \hline - \\ \hline \end{array}$$

$$2 \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

$w_{el} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{j}$  enthält Energie zur Verschiebung der Pol. Ladungen!

# 9.4. Verhalten an Grenzflächen



(A)  $\text{div } \vec{B} = 0 \rightarrow \oint d\vec{A}_F \cdot \vec{B} = 0$

$\hat{n} \cdot A_F (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = A_F (B_{2n} - B_{1n}) = 0$

$\rightarrow$  Normalkomponente  $B_n$  stetig beim Durchgang durch Grenzfläche

(B)  $\text{div } \vec{D} = \rho_0 \rightarrow \oint d\vec{A}_F \cdot \vec{D} = Q_0 \rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \frac{Q_0}{A_F} = \sigma_0$

$\rightarrow$  Ladungsfreie Grenzflächen:  $D_n$  stetig

$\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \frac{Q}{A_F} = \sigma_0 + \sigma_p$

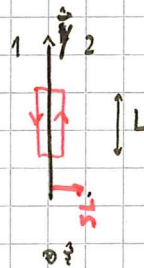
$\rightarrow$  Ladungsfreie Grenzflächen:  $E_{2n} - E_{1n} = \frac{\Delta \Phi_n}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \rightarrow \Delta \Phi_n = -\frac{\Delta P_n}{\epsilon_0}, \sigma_p = -\Delta P_n$  (vgl.  $\sigma_p = -\text{div } \vec{P}$ )  
+ Gauß

(C)  $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \rightarrow \oint d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\int d\vec{A}_F \cdot \dot{\vec{B}}$

$\int_{\text{ey}} L (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 = L (E_{2t} - E_{1t})$

$\rightarrow$  Tangentialkomponente  $E_t$  stetig



(D)  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_0 + \dot{\vec{D}} \rightarrow \oint d\vec{r} \cdot \vec{H} = I_0 + \int d\vec{A}_F \cdot \dot{\vec{D}}$

$L (H_{2t} - H_{1t}) = (I_0)_z$

$\rightarrow$  Stromfreie Grenzflächen  $H_t$  stetig

$\text{rot } \vec{B} = \vec{j} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \vec{j}_0 + \vec{j}_n + \dot{\vec{D}}$

$L/\mu_0 (B_{2t} - B_{1t}) = \frac{(I_0)_z}{\mu_0} + (I_n)_z$

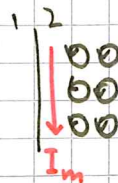
$\vec{H} + \vec{H} = \vec{B}/\mu_0$

$\rightarrow \Delta B_y = \mu_0 \frac{(I_m)_z}{L}$

$\rightarrow \Delta B_y = \mu_0 \Delta M_y$

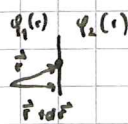
$\Delta M_y = \frac{(I_m)_z}{L}$

Magn. Oberflächenstrom

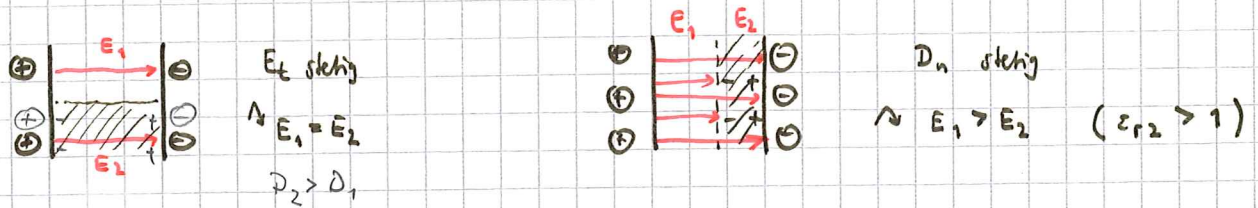


Beachte:  $E_t$  stetig folgt auch aus Stetigkeit des Potentials  $\varphi$ .

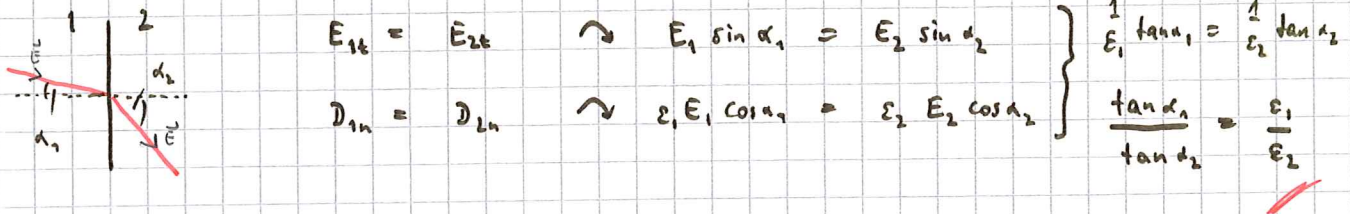
( $\varphi$  muss stetig sein, damit  $E$  endlich):  $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$   
 $\varphi_1(z+dz) = \varphi_2(z+dz) \rightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \parallel$  Grenzfläche



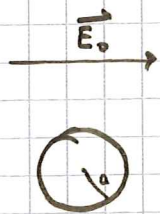
Bsp Plattenkondensator mit Dielektrikum



Bsp Grenzfläche schräg zu Feldlinie



9.5. Dielektrische Kugel im homogenen Feld



$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \leadsto \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi$   
 $\text{div } \vec{D} = 0 \quad (\text{keine mehr Ladungen}) \quad \leadsto \quad -\text{div}(\epsilon \text{ grad } \varphi) = 0$

- Grenzfläche bei  $r=a$ :
- $\varphi$  stetig  $\leftrightarrow E_t$  stetig,  $(\frac{\partial \varphi}{\partial r})_t$  stetig
  - $D_n$  stetig  $\rightarrow \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r}$  stetig
- $\swarrow$  Skalar!

Ansatz (Symmetrie, siehe auch Kap 3.8.)

$\varphi(\vec{r}) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} g(r, a; \epsilon_i, \epsilon_a)$

Einsetzen:

$\text{div } \vec{D} = 0 \quad (r \neq a) \quad = -\epsilon_i \Delta \varphi \quad \leadsto \quad \Delta \varphi = 0 \quad \text{für } r \neq a \quad (r=a \leadsto \epsilon \text{ springt} \leadsto \Delta \varphi \neq 0)$

$\leadsto \quad \frac{4}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{d^2 g}{dr^2} = 0$

$\text{Potenz-ansatz} \quad g(r) = \begin{cases} \alpha + \frac{\beta a^3}{r^3} & r < a \\ \gamma + \frac{\delta a^3}{r^3} & r > a \end{cases}$

- Randbed:
- $g(r=0)$  regulär  $\leadsto \beta = 0$
  - $g(r \rightarrow \infty) = 1$   $\leadsto \gamma = 1$
  - $\varphi$  stetig  $\leadsto \alpha = 1 + \delta$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = - \frac{\partial}{\partial r} \left( \vec{E}_0 \cdot \vec{r} + r \cdot g(r) \right) \leadsto \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} (r g(r)) \text{ stetig}$$

$$\begin{aligned} \leadsto \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial r} (r a) &= \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial r} \left( r + r \delta \frac{a^3}{r^3} \right)_{r=a} \quad \text{bei } r=a \\ \varepsilon_i a &= \varepsilon_a \left( 1 - 2\delta \frac{a^3}{r^3} \right) = \varepsilon_a (1 - 2\delta) \\ \varepsilon_i (1 + \delta) &= \varepsilon_a (1 - 2\delta) \end{aligned}$$

$$\leadsto \delta = \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a}, \quad \alpha = \frac{3\varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a}$$

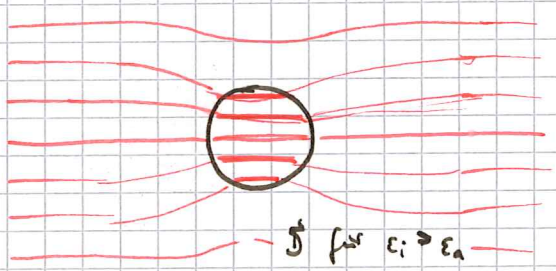
$$\begin{aligned} \varphi(r \leq a) &= -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} (1 + \delta) \\ \varphi(r > a) &= -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \left( 1 + \delta \frac{a^3}{r^3} \right) \end{aligned}$$

„entelektrisiertes Feld“

Felder:  $\vec{E}_i = (1 + \delta) \vec{E}_0 = \vec{E}_0 + \Delta \vec{E}_i, \quad \Delta \vec{E}_i = \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} \vec{E}_0$

$$\vec{D} = \varepsilon_i \vec{E}_i = \frac{3\varepsilon_i}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} \vec{D}_0$$

und  $\vec{E}_a = \vec{E}_0 + \text{Dipolfeld (I)}$  ( $\varphi_{\text{Dipol}} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \varepsilon_0 r^3}$ , hier  $\vec{p} = \sqrt{\varepsilon_0} \delta a^3$ )  
 Dipol = Dichte fest!



Spezialfälle:

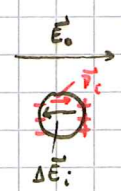
①  $\varepsilon_a / \varepsilon_i \rightarrow 0$  (z.B.  $\varepsilon_i \rightarrow \infty$ )  $\leadsto \vec{E}_i = 0$  wie leitende Kugel  
 $\delta = -1, \quad \varphi(r > a) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right)$

Elektrostatik: Leitendes Medium  $\varepsilon = \infty$  (ideales Dielektrikum)

Aus  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  folgt mit  $\varepsilon \rightarrow \infty \quad \vec{E} = 0$ . (Influenzladung = Polarisationsladung)

②  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$  (Vakuum),  $\Delta \vec{E}_i = - \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_0} \vec{E}_0$

Polarisation  $\vec{P}_i = \vec{D}_i - \varepsilon_0 \vec{E}_i = \frac{3(\varepsilon_i - \varepsilon_0)}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_0} \varepsilon_0 \vec{E}_0$



$$\Delta \vec{E}_i = - \frac{1}{3} \varepsilon_0 \vec{P}_i$$

$\frac{1}{3} \equiv$  Entelektrisierungsfaktor = Fkt der Geometrie ( $\frac{1}{3}$  f. Kugel)



## 9.6. Atomare Polarisierbarkeit und Suszeptibilität

Polarisation  $\vec{P} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{1}{dV} \sum_i \vec{p}_i$  (Dipoldichte)

$$\vec{p}_i (\vec{E}_{\text{lokal}}) = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_{\text{lokal}} \quad (\alpha \text{ atomare Polarisierbarkeit})$$

Lokales Feld:

$$\vec{E}_{\text{lokal}} \neq \vec{E}_{\text{gemittelt}}$$

= Feld aller anderen Dipole & Ladungen

= homogenes Feld  $\vec{E}_{\text{gemittelt}}$  + fehlendes Dipol  $\vec{p}_i$   $\rightarrow \Delta \vec{E}_i = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{p}_i$

$$\vec{E}_{\text{lokal}} = \vec{E} + \Delta \vec{E}_i = \vec{E} - \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{p}_i = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$$



Polarisation:

$$\vec{P} = n \vec{p}_i = \frac{n \alpha}{x} \epsilon_0 \left( \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \right)$$

$n = \frac{N}{V}$   
(Dichte)

$$\vec{P} = \frac{x}{1 - x/3} \epsilon_0 \vec{E} \quad (\text{Vgl. } \vec{P} = \chi_{el} \epsilon_0 \vec{E})$$

Suszeptibilität:

$$\chi_{el} = \frac{x}{1 - x/3}, \quad \epsilon_r = 1 + \chi_{el} = \frac{2x + 3}{3 - x}$$

Diell. konstante

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{x}{3}$$

(Clausius - Mossotti)

gilt für homogene, isotrope Medien

Limits:

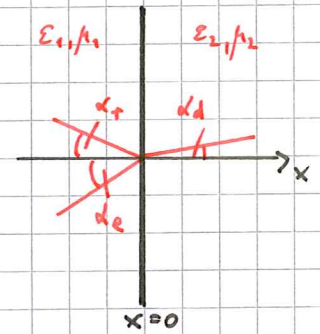
$$\epsilon_r = 1 \quad \hat{=} \quad x = 0, \quad \alpha = 0$$

$$\epsilon_r \rightarrow \infty \quad \hat{=} \quad x = 3 \quad \hat{=} \quad \vec{P} \text{ endlich bei } \vec{E}_{\text{gemittelt}} = 0 \quad (\text{Metall})$$

$$(\vec{E}_{\text{gemittelt}} = 0 \rightarrow 3\epsilon_0 \vec{E}_{\text{lokal}} = \vec{P} \text{ formal})$$

## 9.7. Reflexion und Brechung von Wellen an Grenzflächen

$$\begin{array}{l}
 \text{Einfallend} \\
 \text{Reflektiert} \\
 \text{Durchgelassen}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \vec{E}^e e^{i(\vec{k}^e \cdot \vec{r} - \omega_e t)} \\
 \vec{E}^r e^{i(\vec{k}^r \cdot \vec{r} - \omega_r t)} \\
 \vec{E}^d e^{i(\vec{k}^d \cdot \vec{r} - \omega_d t)}
 \end{array} \right\} n^2 = \epsilon_r \mu_r
 \left. \begin{array}{l}
 \omega_e = \frac{c}{n_1} k_e \\
 \omega_r = \frac{c}{n_1} k_r \\
 \omega_d = \frac{c}{n_2} k_d
 \end{array} \right\}$$



Randbed bei  $x=0$ :  $E_t$  stetig

$$\vec{E}_t^e e^{i(\vec{k}^e \cdot \vec{r} - \omega_e t)} + \vec{E}_t^r e^{i(\vec{k}^r \cdot \vec{r} - \omega_r t)} = \vec{E}_t^d e^{i(\vec{k}^d \cdot \vec{r} - \omega_d t)}$$

für alle  $t$ :  $\omega_e = \omega_r = \omega_d$

für alle  $y, z$ :  $k_{ey} = k_{ry} = k_{dy}$ ;  $k_{ez} = k_{rz} = k_{dz}$

} gilt für bel. Grenzflächenbed.,  
damit auch für Schallwellen etc.

Geometrie  $k_{ey} = k_e \sin \alpha_e = k_{ry} = k_r \sin \alpha_r = k_{dy} = k_d \sin \alpha_d$

Mit  $\omega_e = \omega_r = \omega_d$  und Dispersionsrelation  $\omega = \frac{c}{n} k$  folgt  $k_e = k_r$ ;  $k_e/n_1 = k_d/n_2$

$$\rightarrow \boxed{\sin \alpha_e = \sin \alpha_r} ; \quad \boxed{\frac{\sin \alpha_e}{\sin \alpha_d} = \frac{n_2}{n_1}} = \frac{c_1}{c_2}$$

Im Vakuum  $k_e = k_r = k_1$ ,  $\alpha_e = \alpha_r = \alpha_1$   
 $k_d = k_2$ ,  $\alpha_d = \alpha_2$

Snelliussches  
Brechungsgesetz

Amplituden: Fresnelsche Formeln

Hier werden explizit die Grenzflächenbed  $E_t$  stetig &  $H_t$  stetig verwendet.

$$\begin{array}{l}
 \underline{E_t}: \\
 \underline{H_t}:
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \vec{E}_t^e + \vec{E}_t^r = \vec{E}_t^d \\
 \vec{B}_t^e/\mu_1 + \vec{B}_t^r/\mu_1 = \vec{B}_t^d/\mu_2
 \end{array} \right\} \text{ Aus } \text{rot } \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

folgt  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$

$$\rightarrow \frac{(\vec{k}^e \times \vec{E}^e)_t}{\mu_1} + \frac{(\vec{k}^r \times \vec{E}^r)_t}{\mu_1} = \frac{(\vec{k}^d \times \vec{E}^d)_t}{\mu_2}$$

Die offenen Klammern werden damit und über Transversalität bestimmt.

a) Senkrechter Einfall

$$\left. \begin{aligned} \vec{k}^e &= k_1 \vec{e}_x \\ \vec{k}^r &= -k_1 \vec{e}_x \\ \vec{k}^d &= k_2 \vec{e}_x \end{aligned} \right\} \sim \frac{k_1}{\mu_1} \left[ \vec{e}_x \times \vec{E}^e - \vec{e}_x \times \vec{E}^r \right] = \frac{k_2}{\mu_2} \left( \vec{e}_x \times \vec{E}^d \right)$$

automatisch tangential

$$\text{d.h. } \frac{k_1}{\mu_1} (\vec{E}^e - \vec{E}^r) = \frac{k_2}{\mu_2} (\vec{E}^d)$$

Bezüge:  $\vec{E}^r = a^r \vec{E}^e, \quad \vec{E}^d = a^d \vec{E}^e$

$$\begin{aligned} \sim \quad 1 + a^r &= a^d \\ 1 - a^r &= \frac{\mu_2 k_2}{\mu_1 k_1} a^d =: v a^d \quad \left( v = \frac{k_2 \mu_1}{k_1 \mu_2} = \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1}} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{a^d = \frac{2}{1+v}, \quad a^r = \frac{1-v}{1+v}}$$

Fresnelsche Formeln  
für senkrechten Einfall

Phasensprung bei Reflexion am dichteren Medium  
( $v > 1 \rightarrow a^r < 0$ )

Homogenes Medium: (keine Grenzfläche)

$$v=1, \quad a^d=1, \quad a^r=0$$

b) Schräger Einfall (ohne Beweis)

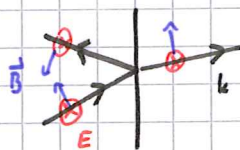
$$\xi = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}$$

$$\boxed{a_{\perp}^d = \frac{2}{1+\xi v}, \quad a_{\perp}^r = \frac{1-\xi v}{1+\xi v}}$$

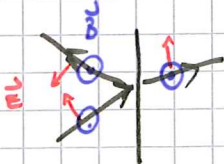
$$a_{\parallel}^d = \frac{2}{\xi+v}, \quad a_{\parallel}^r = -\frac{\xi-v}{\xi+v}$$

konsistent mit Jackson

$E_{\perp}$ :



$E_{\parallel}$ :



Damit entspricht  $a_{\parallel}^r > 0$  einem Phasensprung.

Energiebilanz (nur für senkrechten Einfall)

Erwartung  $S^e = S^d + S^r$

Es gilt:  $|S_p^d| = \frac{|\vec{E}^d \cdot \vec{E}^d|}{\mu} = \frac{h \vec{E}^d}{\omega \mu} = \frac{n}{c_0} \frac{\vec{E}^d}{\mu}$

$\leadsto c_0 S_p^e = \frac{n_1}{\mu_1} (E^e)^2$

$c_0 S_p^r = \frac{n_1}{\mu_1} (a^r E^e)^2 = a^{r^2} c_0 S_p^e$

$c_0 S_p^d = \frac{n_2}{\mu_2} (a^d E^e)^2 = \frac{n_1}{\mu_1} v (a^d E^e)^2 = \underbrace{v \cdot a^{d^2}}_{= \frac{4v}{(1+v)^2}} c_0 S_p^e$   
 $= 1 - \frac{(1-v)^2}{(1+v)^2}$   
 $= 1 - a^{r^2}$

$\leadsto c_0 S_p^d = (1 - a^{r^2}) c_0 S_p^e$

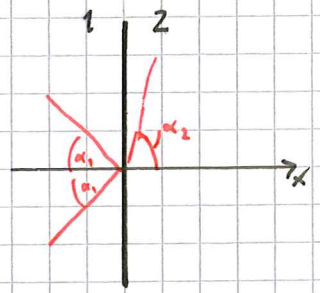
$\leadsto \underline{S_p^d = S_p^e - S_p^r = T S_p^e}$

Reflexionskoeffizient:  $R = a^{r^2}$

Transmissionskoeffizient:  $T = 1 - R$

# 9.8. Total reflexion

$$n_2 < n_1 : \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} < 1$$



Grenzwinkel  $\alpha_G$ :  $\sin \alpha_G = \frac{n_2}{n_1}$

Für  $\alpha_1 > \alpha_G$  ist  $\sin \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_G} > 1$

→  $\exists$  keine gebrochene Welle  $\hat{=}$  „Total reflexion“

Korrekte physikalische Interpretation:  $\sin \alpha_2 = \frac{k_{2y}}{k_2} > 1$ ,  
Mit  $k_2^2 = k_{2x}^2 + k_{2y}^2$  ist dann  $k_{2x}$  reell imaginär!  
 $k_{2x} = i\kappa$

$\vec{E}$ -Feld im Medium 2:  $\vec{E} = \vec{E}^d e^{i(k_{2y}y - \omega t)} e^{-\kappa x}$

Welle parallel zur Oberfläche, klopft in x-Richtung ab!  
(keine Dissipation, Energie wird reflektiert!)

$$\kappa = \sqrt{k_{2y}^2 - k_2^2} = k_2 \sqrt{\sin^2 \alpha_2 - 1} = k_1 \sqrt{\sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_G}$$

$\uparrow$   
 $\frac{k_2}{n_1} = \frac{k_1}{n_2}$

Frennelsche Formeln:

$$a_{\perp}^r = \frac{1 - v \cdot \xi}{1 + v \cdot \xi} ; \quad \xi = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2}}{\cos \alpha_1} = i \xi'_{\text{reell}}$$
$$a_{\parallel}^r = -\frac{\xi - v}{\xi + v} ;$$

→  $a_{\perp}^r = \frac{1 - i v \xi'}{1 + i v \xi'} \quad |a_{\perp}^r| = 1$   
 $a_{\parallel}^r = -\frac{i \xi' - v}{i \xi' + v} \quad |a_{\parallel}^r| = 1$

alles<sup>n</sup> wird reflektiert, mit Phasenverschiebung

Achtung!

$$a_{\perp}^d = \frac{2}{1 + i v \xi'} \neq 0, \quad a_{\parallel}^d = \frac{2}{i \xi' + v} \neq 0$$

(aber keine in x-Richtung propagierende Welle)

Achtung II!

Falls  $n_2$ -Medium dünn (!), dann Transmission möglich!  
  
(hier keine vollst. Refl.)

## 9.9. Kompliziertere Materialgesetze

### a) Räumliche Anisotropie

$$\vec{D} = \overset{\mu}{\epsilon} \vec{E} \quad \text{bzw.} \quad D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j$$

$$\vec{B} = \overset{\mu}{\mu} \vec{H}$$

$$\overset{\mu}{\epsilon}, \overset{\mu}{\mu} \text{ Symmetrische Tensoren; im Hauptachsensystem } \epsilon_{ii} = \epsilon_i \delta_{ii}$$

(führt zu Doppelbrechung etc.)

### b) Frequenz- und Impulsabhängigkeit von $\epsilon$ und $\mu$

$$\vec{D}(k, \omega) = \overset{\mu}{\epsilon}(k, \omega) \vec{E}(k, \omega) \quad (\vec{B} \text{ analog}), \text{ d.h.}$$

$$D_i(x, t) = \sum_j \int dt' \int d^3x' \epsilon_{ij}(x-x', t-t') E_j(x', t')$$

Optische Wellen  $\leadsto$   $k$ -Abhängigkeit kann <sup>meist</sup> vernachlässigt werden  $\leadsto$   $\epsilon(\omega), \mu(\omega)$   
 $n(\omega), c(\omega)$   
 Dispersion

### c) Nichtlineare Response

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij}^{(1)} E_j + \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \dots$$

Wichtig für Dynamik!  $D(\omega) = \epsilon^{(1)} E(\omega) + \epsilon^{(2)} E(\omega_1) E(\omega_2) \delta(\omega + \omega_1 + \omega_2) \dots$

( $\leadsto$  Laser, Nichtlineare Optik)

Grüner Laser ist IR Frequenzverdoppelt!

### d) Piezoelektrizität

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{u}) = \overset{\mu}{\epsilon} \vec{E} + \overset{\mu}{\chi} \vec{u}$$

$\uparrow$  Deformationstensor       $\uparrow$  Piezoelektrizität  
 $(\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{\delta}_i, \vec{u} = \vec{v} \otimes \vec{\delta})$

### e) Magnetwiderstand, Hall-Effekt

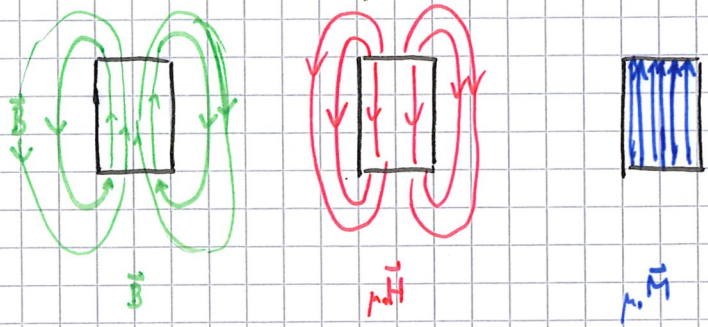
$$\vec{j}(\vec{E}, \vec{B}) = \overset{\mu}{\sigma}(\vec{B}) \vec{E} = \overset{\mu}{\sigma}_0 \vec{E} + \underbrace{\alpha \vec{B} \times \vec{E}}_{\text{Hallstrom}} + \underbrace{\Delta \overset{\mu}{\sigma}(\vec{B}) \vec{E}}_{\text{Magnetwiderstand}}$$

f) Permanent magnet

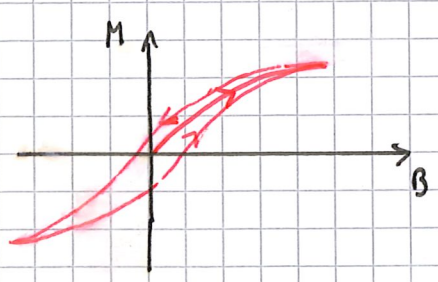
$\vec{H}(\vec{B}) = \vec{M}_0 + \text{Korrekturen}$

$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$   
 $\text{div } \vec{H} = - \underbrace{\text{div } \vec{M}}_{S_{\text{mag}}} ; \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_0 + \underbrace{\dot{\vec{M}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{nur Permanentmagnet}}} = 0$

~ Magnetostatik (analog El. statik)



g) Ferromagnetismus



Hysteresis:  $\vec{M}-\vec{B}$ -Kurve nicht eindeutig, hängt von Vorgeschichte ab (Gedächtnis)

Analog: Ferroelektrika ( $\vec{P} \neq 0$ )

h) Supraleiter

$\vec{B} = 0$  (Meissner-Ochsenfeld-Effekt)  $\rightarrow \mu = 0$  (idealer Diamagnet)  
 $\sigma = \infty$  (idealer Leiter)  $\rightarrow$  Dauerstrom in SL Ritz.

Dichte der SL Ladungsträger:  $n_s^*$   
 Ladung:  $-e^*$   
 Supraström:  $\vec{j}_s = n_s^* e^* \vec{v}$

}  $\rightarrow$  Ladungsdichte  $\rho_s^* = n_s^* e^*$

Ladungsträger werden durch Feld beschleunigt:  $|\dot{\vec{v}}| \sim |\dot{\vec{E}}|$

$$\leadsto \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = \frac{n_s^* e^{*2}}{m^*} \vec{E} \quad \text{1. London-Gleichung}$$

↖ eff. Masse

Aus  $\text{rot } \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$  kann man ableiten:

$$\text{rot } \vec{j}_s = \frac{n_s^* e^{*2}}{m^*} \vec{B} = 0 \quad \text{2. London-Gleichung}$$

Mit  $\text{rot } \vec{B} / \mu_0 = \vec{j}_s + \cancel{\epsilon_0 \dot{\vec{E}}}$  folgt dann: ( $\leadsto$  Übung)

$$\Delta \vec{B} = \frac{n_s^* e^{*2} \mu_0}{m^*} \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

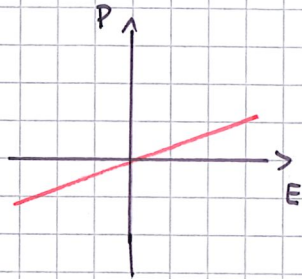
$$\leadsto B(x) = B_0 e^{-x/\lambda}, \quad \lambda \text{ Eindringtiefe}$$

2. London-Gl. wird erfüllt durch  $\vec{j}_s = -\frac{n_s^* e^{*2}}{m^* c} \vec{A}$  mit  $\text{div } \vec{A} = 0$ .

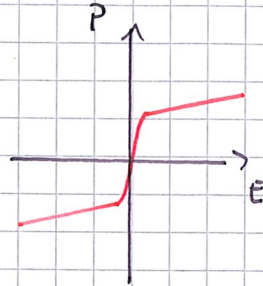


## i) Klassifikationen

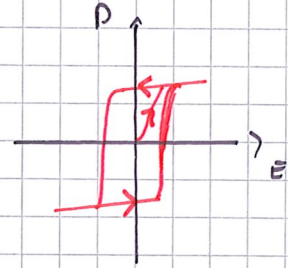
$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad , \quad \text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_0$$



Dielektrikum



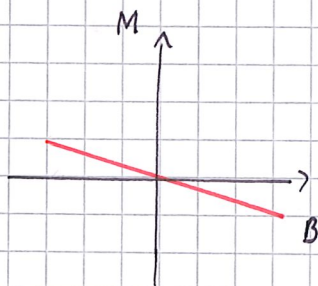
Paraelektrikum



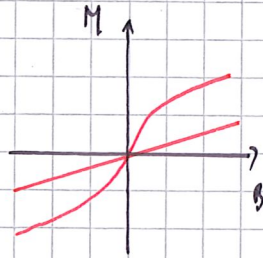
Ferroelektrikum

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (\text{z.B.} \quad \vec{M} = \chi_m' \frac{\vec{B}}{\mu_0}) \quad (\chi_m = \frac{\chi_m'}{1 - \chi_m'})$$

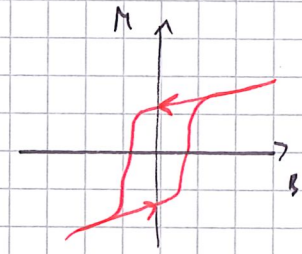
$$\text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_0 + \dot{\vec{D}}$$



Diamagnet



Paramagnet



Ferromagnet

Außerdem:  $\epsilon(\omega)$ ,  $\mu(\omega)$

$$\epsilon_r(\omega) < 1 \quad \text{möglich}$$