10. Quasistationäre Ströme

10.1. Quasistationäre Näherung

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E} = \rho$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \qquad \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B} - \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} = \vec{j}$$

Idee: Zeitabhängigkeit $\boxed{\text{langsam}}$

Quasistationäre Näherung: $\boxed{\varepsilon_0 \dot{\vec{E}} \ll \vec{j}}$ bzw. $\varepsilon_0 \int d\vec{A}_F \cdot \dot{\vec{E}} \ll I$

Damit: effektive Entkopplung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ (in felderzeugender Quelle!)

Mit quasistationärer Näherung:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}\,, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \quad \curvearrowright \quad -\Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j} \qquad \left(\text{mit } \operatorname{div}\vec{A} = 0, \text{ Coulomb-Eichung}\right)$$

Also: $\vec{j}(\vec{r},t) \xrightarrow[\text{Zeit nur Parameter}]{} \vec{A}(\vec{r},t) \longrightarrow \vec{B}(\vec{r},t)$

Exakt wäre: $\Box\vec{A} = \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\vec{A} = \mu_0\vec{j}$

Vernachlässigung von $\dot{\vec{E}}$ entspricht also $\Box \approx -\Delta$ (Retardierung vernachlässigt)

Bedingung für quasistat. Näherung:

$$\partial_t \sim -i\omega \sim -i\frac{2\pi}{\tau}$$

$$\partial_{\vec{r}} \sim \mathcal{O}(1/\ell) \qquad \ell \dots \text{charakt. Länge für Änderung des Feldes}$$

$$\curvearrowright \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \ll \Delta \quad \text{ist} \quad \omega^2/c^2 \ll 1/\ell^2\,, \qquad \omega/c = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\curvearrowright \underline{\left(\frac{2\pi\ell}{\lambda}\right)^2 \ll 1} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\left(\frac{2\pi\ell}{c\tau}\right)^2 \ll 1}$$

Bsp

$\omega = 2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \quad \curvearrowright \quad \lambda = 6\cdot 10^6\,\text{m} \quad \gg \quad$ Geräteausdehnung

Schließlich: Berechnung von $\vec{E}$:

$$\Box \varphi = \rho/\varepsilon_0 \quad \curvearrowright \quad -\Delta\varphi = \rho/\varepsilon_0$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \dot{\vec{A}}$$

Achtung: $\dot{\vec{A}}$ kann hier nicht vernachlässigt werden ($\operatorname{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ $\hat{=}$ Induktion!)

10.2. Leiterschleifen

Mehrere Schleifen mit Strömen I_k

Induktionsgesetz: $(U_{ind})_i = -\dot{\phi}_i$ (exakt)

$$\phi_i(t) = \int_{S_i} d\vec{A}_p \cdot \vec{B}(t) = \sum_k L_{ik} I_k(t)$$

Quasistat. Näherung: ohne Retardierung

Leiterschleife i: R_i, C_i, Spannungsquelle U_i (zeitunabhängig)

$$U_{ind} = \oint d\vec{r}\,(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) = \oint d\vec{r}\,\vec{E}' \quad \text{(mitbewegtes BZ)}$$

Kirchhoff: $-U_i + R_i I_i + Q_i/C_i = U_{ind} = -\frac{d}{dt}\sum_k L_{ik} I_k$

$$\boxed{\dot{U}_i = R_i \dot{I}_i + I_i/C_i + \sum_k L_{ik}\ddot{I}_k}$$

Nur induktive Kopplung
keine kapazitive Kopplung

Speziell 1 Schleife: $\dot{U} = L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C$

(a) Eigenschwingung $U = 0$

$$I = I_0 e^{i\omega_0 t} \quad \curvearrowright \quad -\omega_0^2 L + i\omega_0 R + 1/C = 0$$

$$R = 0 \quad \curvearrowright \quad \omega_0 = \sqrt{1/LC}, \quad \text{sonst Dämpfung}$$

(1) Erzwungene Schwingung

$$U = U_0\, e^{i\omega t} \curvearrowright I = I_0\, e^{i\omega t}$$

$$+ i\omega U_0 = \left(-\omega^2 L + i\omega R + 1/C\right) I_0$$

$$U_0 = \underbrace{\left[R + \left(i\omega L - \frac{i}{\omega C}\right)\right]}_{Z} I_0$$

Z (Scheinwiderstand), $Z = |Z|\, e^{i\varphi}$

$$\curvearrowright U_0 = Z I_0 \,, \quad I = \mathrm{Re}\; I_0\, e^{i\omega t}, \quad U = \mathrm{Re}\; U_0\, e^{i\omega t} \curvearrowright U = Z I = Z I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Energiebilanz:

$$U = L\dot{I} + RI + Q/C$$

$$\curvearrowright \underline{UI} = \underline{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} Q^2/C\right) + R I^2}$$

Leistung $\quad W_{mag} \quad W_{el} \quad$ Joulesche Wärme (Dissipation)

Mittelung über eine Periode: $\overline{N} = \overline{N}_{Joule}$

$$\overline{I^2} = I_0^2\, \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} I_0^2 \curvearrowright I_{eff} := 1/\sqrt{2}\; I_0$$

$$U_{eff} := 1/\sqrt{2}\; U_0$$

$$\underline{\overline{N}} = U_0 I_0\, \overline{\cos\omega t \, \cos(\omega t + \varphi)}$$

$$= \frac{1}{2} U_0 I_0 \left(\overline{\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi}\right) = \underline{U_{eff}\, I_{eff} \cos\varphi}$$

Gleiches Ergebnis über $\overline{N} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\,(U^* I) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\,(U I^*) = \overline{(\mathrm{Re}\, U)(\mathrm{Re}\, I)}$

$$\cos\omega t \, \cos(\omega t + \varphi) = \cos\omega t \left(\cos\omega t \cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi\right)$$

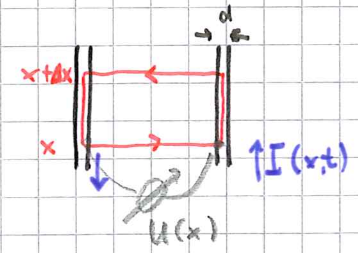
$$\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi = \cos 2\omega t \cos\varphi + \cos\varphi - \sin 2\omega t \sin\varphi$$

$$= \left(2\cos^2\omega t - \cancel{1}\right)\cos\varphi + \cancel{\cos\varphi} - 2\sin\omega t \cos\omega t \sin\varphi$$

$$= 2\cos\omega t \left(\cos\omega t \cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi\right) \;/\!/$$

10.3. Drahtwellen

Doppelleiter



Größen pro Länge:

Induktivität	$\ell =$	$\frac{\Delta L}{\Delta x}$
Kapazität	$\varsigma =$	$\frac{\Delta C}{\Delta x}$
Widerstand (links + rechts)	$r =$	$\frac{\Delta R}{\Delta x}$
Ladung	$q =$	$\frac{\Delta Q}{\Delta x}$

Induktion: $\oint_{\square} d\vec{r}\cdot\vec{E} = -\frac{d}{dt}(\Delta\phi)$

Quasistat.: $\Delta\phi(x,t) = \underbrace{\ell\cdot\Delta x}_{L \text{ Indukt.}} \cdot I(x,t)$ (auch $d \ll \lambda$)

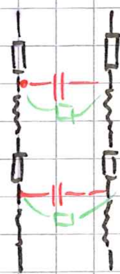
Spannungsbilanz (Masche): $\underbrace{U(x+\Delta x) - U(x)}_{\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x} + \Delta x\cdot r\cdot I = -\Delta x\,\ell\,\dot{I}$

$\curvearrowright$ $$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} + rI + \ell\dot{I} = 0}$$

Ladungsbilanz: (ein Leiter) $\frac{d}{dt}(\Delta Q) + \oiint d\vec{A}_F\cdot\vec{j} = 0$

$\Delta x\,\dot{q} + I(x+\Delta x) - I(x) + \underbrace{\Delta x\, g\, U(x)}_{\text{Verluste, } g \text{ ist Leitwert pro Länge in Isolation}} = 0$

$Q = C\cdot U$ $\curvearrowright$ $$\boxed{\varsigma\dot{U} + \frac{\partial I}{\partial x} + gU = 0}$$



Also $\varsigma\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + g\frac{\partial U}{\partial x} = 0$

Oben $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t} + r\dot{I} + \ell\ddot{I} = 0$

$\curvearrowright$ $$\boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \varsigma\ell\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - (\varsigma r + g\ell)\frac{\partial I}{\partial t} - grI = 0}$$

Telegraphen-Gleichung

Verluste

Ideale Leitung: $r = 0 \,,\; g = 0$

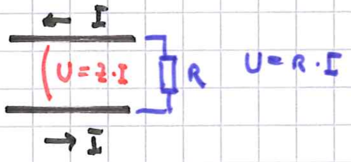
$$\rightsquigarrow \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \varsigma \ell \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad I(x,t) = I(x \mp v_0 t)$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit $v_0^2 = 1/\varsigma \ell$ $\quad$ ($\ll c_0 \to \infty$ quasistat.)

Weiter: $\dfrac{\partial U}{\partial x} = -\ell \dfrac{\partial I}{\partial t} = \pm v_0 \ell \dfrac{\partial I}{\partial x}$

$$\rightsquigarrow \quad U = \pm \ell v_0 I = \pm \sqrt{\ell/\varsigma}\, I \; ; \quad Z = \sqrt{\ell/\varsigma}$$ „Wellenwiderstand"

Anpassung:



Bei $R \neq Z$ teilweise Reflexion der Welle.

Anpassung $R = Z$ bzw. $Z_1 = Z_2$ für 2 Wellenleiter.

Nichtideale Leitung:

Ansatz: $I(x,t) = I_0 \, e^{-i(k \cdot x - \omega t)}$

Einsetzen liefert (o.B.):

$$k = k_0 - i k_1 \quad \rightsquigarrow \quad I = I_0 \, e^{-k_1 x} \, e^{-i(k_0 x - \omega t)}$$

$$k_0 = \frac{\omega}{v_0} \left(1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{r}{\ell} - \frac{g}{\varsigma} \right)^2 \right) \quad \rightsquigarrow \quad v = \frac{\omega}{k_0} \neq v_0$$

$\rightsquigarrow$ $v(k)$ Dispersion $\rightsquigarrow$ Signalverzerrung

„Ausschalten" der Dispersion: (durch Anpassen von ℓ) $\quad \dfrac{r}{\ell} = \dfrac{g}{\varsigma} \quad \rightsquigarrow \quad k_0 = \dfrac{\omega}{v_0}$ ideal

Dämpfung $\quad k_1 = \dfrac{1}{2 v_0} \left(\dfrac{r}{\ell} + \dfrac{g}{\varsigma} \right)$

10.4. Quasistationäre Ströme in Leitern (endliche Dichte!)

$$\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = \vec{j}_L + \cancel{\varepsilon\dot{\vec{E}}}$$ quasistationäre Näherung

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\varepsilon\,\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho_0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

$$\vec{j}_L = \sigma\vec{E} \qquad (\vec{j}_L \to \vec{j})$$

Damit:

$$\mathrm{rot}\,\vec{j} = \sigma\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\sigma\dot{\vec{B}}$$

$$\curvearrowright \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = -\sigma\dot{\vec{B}} = \frac{1}{\mu}\left(\mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{B}}_{0} - \Delta\vec{B}\right)$$

$$\curvearrowright \boxed{\begin{aligned} \Delta\vec{B} - \mu\sigma\dot{\vec{B}} &= 0 \\ \Delta\vec{E} - \mu\sigma\dot{\vec{E}} &= 0 \\ \Delta\vec{j} - \mu\sigma\dot{\vec{j}} &= 0 \end{aligned}}$$

$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu\sigma\vec{E}$

Typ Diffusionsgleichung, irreversibel
($\partial^2/\partial r^2$, aber $\partial/\partial t$)

Ansatz:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Einsetzen:

$$-\vec{k}^2 - i\mu\sigma\omega = 0 \quad \curvearrowright \quad k = \sqrt{-i\mu\sigma\omega} = k_0(1-i)$$

$(\vec{k}\parallel\vec{e}_x)$

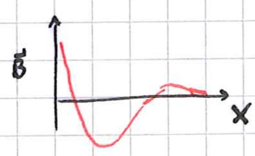
$$k_0 = 1/\delta = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}$$

$$\curvearrowright \quad \underline{\vec{B} = \vec{B}_0\, e^{-i(kx-\omega t)} = \vec{B}_0\, e^{i(\omega t - k_0 x)}}\;\underbrace{e^{-k_0 x}}_{e^{-x/\delta}}$$

Eindringtiefe $\delta \sim 1/\sqrt{\omega}$

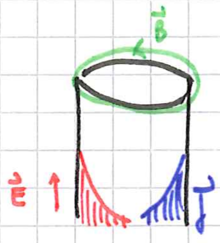
Im Inneren des Leiters fallen Strom & Felder exponentiell ab!!

Leiter in z-Richtung:



Für nichtebene Oberflächen gilt Beschreibung für $r \gg \delta$.

Bsp Skin-Effekt: Wechselstrom fließt an Drahtoberfläche!



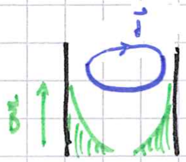
Eindringtiefe für Cu:

$(\mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ N/A^2,$

$1/\sigma \approx 1.55 \cdot 10^{-8}\ \Omega m)$

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$	δ
1 Hz	6 cm
100 Hz	6 mm
10 kHz	0,6 mm

Bsp Magnetfeld im Eisenkern



Abschirmströme (Wirbelströme)

Fe:

$(\mu = 100\mu_0,\ 1/\sigma \sim 8.6 \cdot 10^{-8}\ \Omega m)$

ν	δ
1 Hz	1.5 cm
100 Hz	1,5 mm
1 kHz	0,15 mm

Gegenmaßnahme: $\sigma \to 0$ (isolierte Lamellen ↷ Trafo)

Widerstand eines Drahtes bei Skineffekt

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{E \cdot l}{I}$$, $E \equiv$ von außen angelegtes Feld

$\delta \ll r$ ↷ starker Skineffekt

$$I = \int d\vec{A}_F \cdot \vec{j} = \sigma \int_0^{\infty\ (\delta \ll r)} dx\, E(x) \cdot 2\pi r \quad , \quad E(x) = E\, e^{+(i-1)k_0 x}$$

$$= \sigma E\, 2\pi r \int_0^{\infty} dx\, e^{(i-1)k_0 x} = \sigma E\, 2\pi r \frac{1}{(i-1)k_0} \cdot (-1)$$

$$\curvearrowright \quad \frac{Z}{l} = \frac{(1-i)\,\overbrace{k_0}^{=1/\delta}}{2\pi r \sigma} = \frac{1-i}{2\pi r}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} \qquad (\text{für } \delta \ll r)$$

Vgl. Gleichstromwiderstand:

$$\frac{R}{l} = \frac{1}{\pi r^2 \sigma} \quad \curvearrowright \quad \frac{Z}{R} = \frac{1-i}{2}\,\frac{r}{\delta} \gg 1 \quad (!)$$