

11. Dispersion

11.1. Allgemeines über Wellen in leitenden Medien

Ausgangspunkt: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{j}_0 = \sigma \vec{E}$, $\mu = \mu_0$

Maxwell: $\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \vec{j}_0 + \dot{\vec{D}} = \sigma \vec{E} + \epsilon \dot{\vec{E}}$ | ∂_t

$$\leadsto \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \dot{\vec{B}} = \sigma \vec{E} + \epsilon \dot{\vec{E}} \quad (*)$$

und $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$, $\epsilon \text{div } \vec{E} = \rho_0 = 0$

$$\leadsto -\frac{1}{\mu_0} \text{rot rot } \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \text{grad div } \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \Delta \vec{E} \stackrel{(*)}{=} \sigma \vec{E} + \epsilon \dot{\vec{E}}$$

Ansatz: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ $\leadsto \frac{1}{\mu_0} (-i\vec{k})^2 = -i\omega\sigma + (i\omega)^2 \epsilon$

$$\leadsto \underline{\underline{\vec{k}^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \left(\frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega} + \epsilon_r \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\epsilon_r + \frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right)}}$$

Aufspaltung von \vec{j} in \vec{j}_0 und \vec{j}_p ist für $\omega > 0$ willkürlich
(insbesondere bei hohen Frequenzen) \leadsto Beiträge wieder zusammenfassen zu \vec{E}_r
(oder zu $\frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega}$).

$\vec{E}_r(\omega)$ ist dabei komplex. Auftrennung in ϵ_r und $\frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega}$ nur eindeutig für $\omega \rightarrow 0$, sonst können $\epsilon_r(\omega)$ und $\sigma(\omega)$ jeweils auch komplex sein.

Def: $\underline{\underline{\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{n}^2}}$; $\underline{\underline{\tilde{n}(\omega) = \sqrt{\tilde{\epsilon}_r(\omega) = n(1+i\kappa)}}$ ($\mu = \mu_0$)
n, κ reell

Grenzfälle: $\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \gg \epsilon_r$ bzw. $\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ $\leadsto \epsilon_r$ vernachlässigen $\hat{=}$ quasistatischer Fall
 $\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \ll \epsilon_r$ bzw. $\omega \gg \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ $\leadsto \sigma$ vernachlässigen $\hat{=}$ Dielektrikum

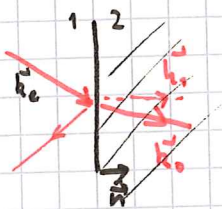
Interpretation von \tilde{n} :

ω reell, $\vec{k} = \vec{k}_0 + i\vec{k}_1$, $|\vec{k}_0| = \frac{2\pi}{\lambda}$ Wellenlänge
 $|\vec{k}_1| = 1/\delta$ Abklinglänge

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \underbrace{e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)}}_{\text{Wellenausbreitung}} \underbrace{e^{-\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}}_{\text{Abklingen}}$$

Achtung: \vec{k}_0 und \vec{k}_1 nicht notwendig parallel, sondern ergeben sich aus Randbedingungen! (Stetigkeit ...)

z.B.:



Gleichheit an Grenzfläche $\rightarrow \vec{k}_{\parallel}$ stetig
 Da k_0 reell $\rightarrow \vec{k}_1$ normal $\parallel \vec{n}$
 $\rightarrow E \sim e^{-x/\delta}$ (Vakuum)

Also: Richtungen aus Randbed; Beträge aus Dispersionsrelation

Speziell: $\vec{k}_0 \parallel \vec{k}_1 \parallel e_x^z$, $\vec{k} = k e_x^z$ (komplex) ($\tilde{n} = n(1+i\kappa)$)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{n}^2, \quad k = \frac{\omega}{c} \tilde{n} = \frac{n\omega}{c} (1+i\kappa)$$

$$|\vec{k}_0| = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad |\vec{k}_1| = \frac{n\kappa\omega}{c} = 1/\delta$$

Wem: Formal auch komplexes ω möglich \rightarrow zeitliches Abklingen

Grenzfall $\omega \rightarrow 0$
(für Leiter)

$$\sigma/\omega \rightarrow \infty, \quad \tilde{n} = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{\epsilon_r + \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega}} \rightarrow \infty$$

$$n \rightarrow \infty, \quad n\kappa \rightarrow \infty$$

Reflexionsverhalten:
(Fresnel, $n_1=1$)

$$a^r = \frac{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{n_2}{n_1}}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{n_2}{n_1}} = \frac{1 - \tilde{n}}{1 + \tilde{n}} \rightarrow -1$$

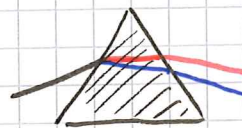
Vollständige Reflexion, analog Totalreflexion

\rightarrow Leiter undurchsichtig — Achtung: hier Limes $\omega \rightarrow 0$,
nicht für sichtbares Licht
(komplizierter!)

11.2. Dispersion in Dielektrika

Dispersion: $n(\omega)$, $c_{\text{Phase}} = \frac{c}{n(\omega)} = c_n(\omega)$ Phasengeschwindigkeit

Allg. $n(\omega)$ wächst mit ω
 "normale Dispersion"

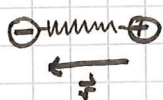


Elementare Theorie der Dispersion $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$

Atomare Dipole

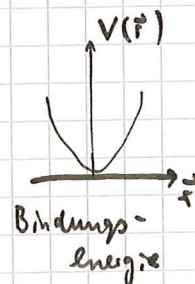


Ohne Feld $\vec{p} = 0$



Mit Feld $\vec{p} = -e\vec{r}$

Beweg.gl: $m \ddot{\vec{r}} + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = -e \vec{E}_{\text{lok}}$
 ($m = \text{reduzierte Masse}$)



Kleine Auslenkung $V(\vec{r}) = V(0) + \frac{m\omega_0^2}{2} \vec{r}^2 + \dots$
 harmonische Näherung

$m(\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r}) = -e \vec{E}_{\text{lok}}$

Nun: $\vec{E}_{\text{lok}} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$, erzwungene Schwingung $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$

Einsetzen: $m(-\omega^2 + \omega_0^2) \vec{r}_0 = -e \vec{E}_0$

$\vec{r}_0 = -\frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}_0$, $\vec{r} = -\frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}_{\text{lok}}$

$\vec{p} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}_{\text{lok}} = \alpha(\omega) \epsilon_0 \vec{E}_{\text{lok}}$

atomare Polarisierbarkeit

Früher: (Kap 9.6) Clausius - Mosotti

$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{1}{3} N \alpha$

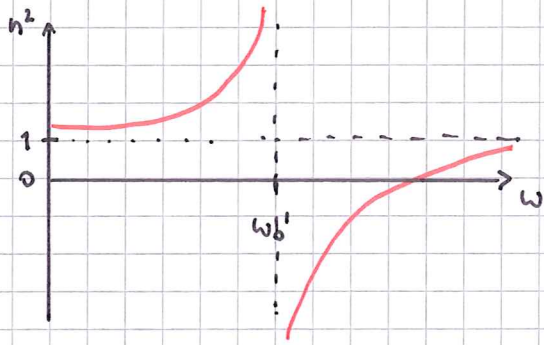
$N = \text{Dichte der atomaren Dipole}$

$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} \frac{N e^2 / \epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2}$, $\alpha = \frac{e^2 / \epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2}$

(Lorentz - Lorentz)

Umformen

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2/\epsilon_0 m}{\omega_0'^2 - \omega^2} \quad \text{mit} \quad \omega_0'^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{Ne^2/\epsilon_0 m}{3\omega_0^2}\right)$$



Einfluss der Inhom. des Feldes

- $\omega < \omega_0'$: $n^2 > 1$, \vec{p} und \vec{E} in Phase
- $\omega = \omega_0'$: Resonanz
- $\omega > \omega_0'$: \vec{p} und \vec{E} antiphasig
- $\omega \rightarrow \infty$: $n^2 \rightarrow 1$, $\vec{p} \rightarrow 0$
(atomare Dipole können nicht folgen)

Im allgemeinen: $n(\omega)$ wächst mit ω

normale Dispersion (blau stärker gebrochen als rot)

Kleiner Bereich oberhalb ω_0' : $n^2 < 0 \leadsto k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 < 0 \leadsto k = ik'$ reell
 Damit $e^{ikx} \rightarrow e^{-k'x}$ exponentieller Abfall analog Totalreflexion

Berücksichtigung der Dämpfung ($\hat{=}$ Dissipation)

$$m \left(\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} + \gamma \dot{\vec{r}} \right) = -e \vec{E}_{\text{lok}}$$

$$m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega) \vec{r} = -e \vec{E}_{\text{lok}} \quad , \quad \text{d.h.} \quad \omega^2 \rightarrow \omega^2 + i\gamma\omega$$

$$\leadsto \underline{\tilde{n}^2 = 1 + \frac{Ne^2/\epsilon_0 m}{\omega_0'^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}}$$

ω_0' unverändert

$$\tilde{n} = n(1 + i\epsilon)$$

Reales Material: Mehrere Oszillatoren

$$\omega_0' \rightarrow \omega_k, \quad \gamma \rightarrow \gamma_k, \quad \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \rightarrow a f_k \quad \text{mit} \quad \sum f_k = 1$$

Oszillatorstärke

und $a = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$ gemittelt

$$\underline{\tilde{n}^2 = 1 + a \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}}$$

(Bem. Quantentheorie ist konsistent mit $\sum f_k = 1$)

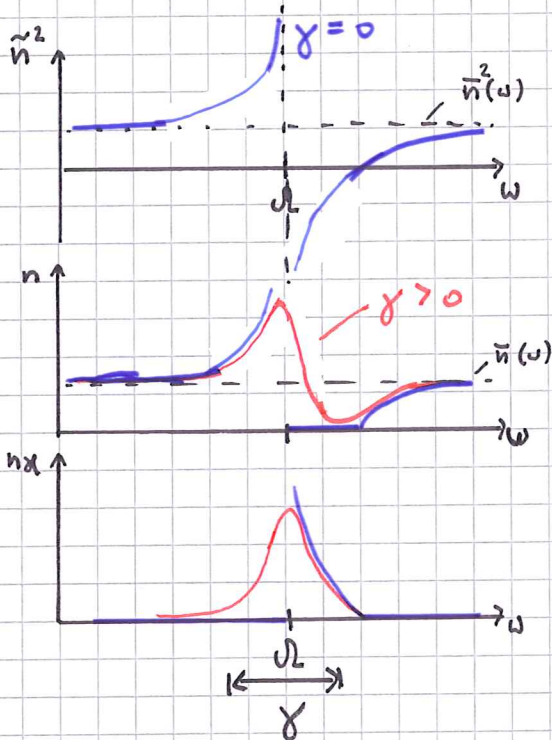
11.3. Anomale Dispersion

Betrachte Umgebung einer Resonanzstelle.

Annahme $\gamma_k \ll \omega_k \rightarrow$ Dämpfung vernachlässigbar weg von Resonanz

k-te Resonanzstelle: $\omega_k \rightarrow \Omega$, $\gamma_k \rightarrow \gamma$, $a_k \rightarrow A$

Andere Beiträge: $\bar{n}(\omega)$ langsam veränderlich, näherungsweise reell



$$\tilde{n}^2 = \bar{n}^2 + \frac{A}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

γ wichtig wenn $\gamma\omega \gtrsim |\Omega^2 - \omega^2|$
 $\omega \approx \Omega \rightarrow \gamma\Omega \gtrsim |\Omega - \omega| 2\Omega$
 $|\Omega - \omega| \leq \gamma/2$

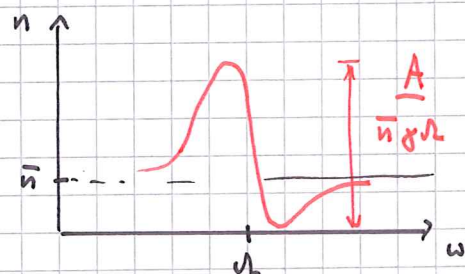
$n(\omega)$ abfallend an Resonanzstelle

\rightarrow „anomale Dispersion“
 (gleichzeitig starke Dämpfung)

Mathematische Behandlung für $\frac{A}{\gamma\Omega} \ll \bar{n}^2$ (Dämpfung nicht zu klein)

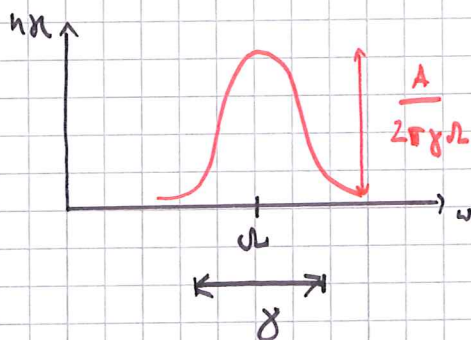
$$\tilde{n} = \left(\bar{n}^2 + \frac{A}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right)^{1/2} = \bar{n} \left(1 + \frac{A/\bar{n}^2}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right)^{1/2}$$

$$\approx \bar{n} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{A/\bar{n}^2}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right)$$



$$\sim n = \bar{n} + \frac{A}{2\bar{n}} \frac{\Omega^2 - \omega^2}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$n_x = \frac{A}{2\bar{n}} \frac{\gamma\omega}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$



11.4. Metalldispersion

Bisher: Dielektrika $\tilde{n}^2 = 1 + a \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega}$

Nun: Leiter $\left\{ \begin{array}{l} \text{gebundene Elektronen } \omega_k \neq 0 \\ \text{freie Elektronen } \omega_k = 0 \end{array} \right.$

$$\tilde{\epsilon}_r = \tilde{n}^2 = 1 + a \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega} = \frac{(N e^2 / \epsilon_0 m)_L}{\omega^2 + i\gamma_L \omega}$$

\uparrow gebundene El. \uparrow Leitungs-el.

Kap 11.1: $\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_r + \frac{i\sigma}{\omega \epsilon_0}$

$$\sigma(\omega) = \frac{i(N e^2 / m)_L}{\omega + i\gamma_L} \quad \leadsto \quad \underline{\sigma_0 = \frac{(N e^2 / m)_L}{\gamma_L}}$$

Gleichstromleitfähigkeit (Drude 1900)

Einschub: Drude-Theorie der Metalle

$\vec{j} = \rho \vec{v}$, $\rho = -e N_L$, Kräftebilanz $\underbrace{-e \vec{E}}_{\text{Coulomb}} - \underbrace{m \gamma_L \vec{v}}_{\text{Reibung}} \stackrel{!}{=} 0$

$$\vec{v} = \frac{-e \vec{E}}{m \gamma_L}$$

$$\vec{j} = -e^2 \frac{N_L}{m \gamma_L} \vec{E} \stackrel{!}{=} \sigma_0 \vec{E} \quad \leadsto \quad \sigma_0 = \frac{N_L e^2 / m}{\gamma_L} \quad \text{wie oben}$$

$\gamma_L \equiv \gamma \hat{=} \text{Stoßfrequenz}$, $\tau \equiv \frac{1}{\gamma} \hat{=} \text{Stoßzeit (Dauer des freien Flusses)}$

(Mit Wechselfeld: $\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$ wie oben) //

Damit für Leiter:

$$\tilde{\epsilon}_r = n_0^2 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad \text{mit} \quad \omega_{pl}^2 = \left(\frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \right)_L = \frac{\sigma_0 \gamma}{\epsilon_0}$$

\uparrow gebundene El.

Plasmafrequenz

Typische Material freq:

$\gamma \ll \omega_{pl} \ll \omega_k$ (Cu: $\gamma \approx 10^{14} \text{ s}^{-1}$, $\omega_{pl} \approx 3 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$)

Damit können 3 Frequenzbereiche unterschieden werden:

- a) $\omega \ll \gamma$ Radiowellen
 b) $\gamma \ll \omega \ll \omega_{pl}$ sichtbares Licht ($\approx 3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$)
 c) $\omega \gg \omega_{pl}$ Röntgenwellen ($\approx 10^{19} \text{ s}^{-1}$)

Fall a) $\tilde{\epsilon}_r \approx n_0^2 - \frac{\omega_{pl}^2}{i\gamma\omega} \approx i \frac{\sigma_0}{\epsilon_0\omega}$ (quasistatisch, siehe Kap 11.1.)

$$k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{i\sigma_0}{\epsilon_0\omega}} = \sqrt{i\mu_0\omega\sigma_0} \quad \text{Skin effekt}$$

Fall b) $\tilde{\epsilon}_r \approx n_0^2 - \underbrace{\frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}}_{\gg 1} \approx -\frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2} \leadsto \tilde{n} = i\kappa, k = i\kappa'$
 exponentieller Abfall analog Totalrefl

Achtung: Hier räumliche Dispersion $\epsilon(\omega, \vec{k})$ vernachlässigt.

(\leadsto anomaler Skin effekt: Skin tiefe $\delta \ll \frac{v}{\gamma}$)
 mittl. freie Wegl

Fall c) $\left(\frac{\omega_{pl}}{\omega}\right)^2 \ll 1 \leadsto \epsilon_r \approx n_0^2$

Leitungs-
 unwichtig Verhalten
 wie Dielektrikum

11.5. Longitudinale Wellen

Leiter ohne makroskopische Ladung: $\text{div } \vec{D} = 0$
 $\leadsto \text{div}(\epsilon \vec{E}) = i\vec{k} \cdot \epsilon \vec{E} \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ transverse Welle
 \downarrow $\epsilon = 0$ Longitudinale Welle?

Versuch $\vec{k} \parallel \vec{E}$, $\epsilon = 0$: Frequenzen?

Dazu: $\tilde{\epsilon}_r = n_0^2 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} = \tilde{\epsilon}_r(\omega)$

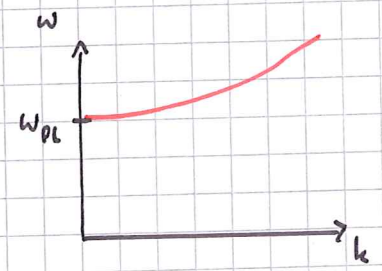
"Ideal": $\gamma = 0$, außerdem $n_0 = 1$

$\leadsto \tilde{\epsilon}_r = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \rightarrow \tilde{\epsilon}_r = 0$ bei $\omega = \omega_{pl}$ unabh. von \vec{k}

Achtung: Longitudinale Welle besitzt kein Magnetfeld!

denn $\vec{B} = -\text{rot } \vec{E} = -i\vec{k} \times \vec{E} = 0 \leadsto \vec{B} = 0$

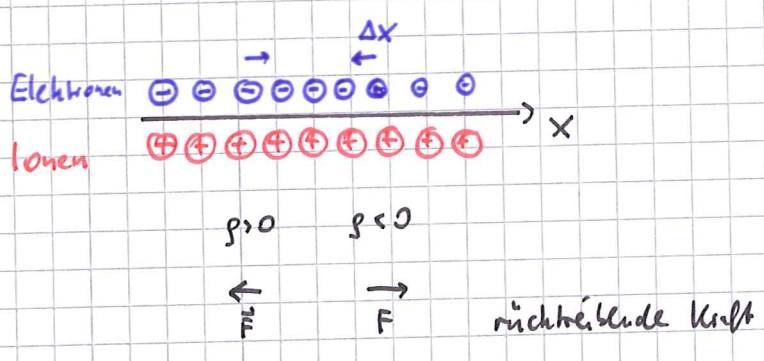
Realer Fall: $\epsilon(\omega, \vec{k})$ ↙ räumliche Dispersion
 $\leadsto \omega(k)$ Dispersion, außerdem Dämpfung



Bez: "Plasmafrequenz" da Elektronenwolke im Metall sich wie Plasma (Gas aus ionisierten Teilchen) verhält

Bez: Longitudinale Welle $\hat{=}$ "Plasma Schwingung" oder "Plasmon"

Phys. Bild: Dichtewelle der Leitungselektronen (Auslenkung Δx)



Longitudinale Oszillation des Elektronengases, mit Plasmafrequenz als Eigenfrequenz

11.6. Gruppengeschwindigkeit

(siehe auch Landau / Lifshitz 3d8)

Harmonische Welle

$$u \sim e^{i(kx - \omega t)} = e^{ik(x - \frac{\omega}{k}t)}$$

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

Phasengeschwindigkeit

Vakuum $c_{ph} = c_0$; Medium $c_{ph} = \frac{c_0}{n}$

Dispersion $c_{ph}(\omega) = \frac{c_0}{n(\omega)}$

Überlagerung von zwei Wellen unterschiedlicher Frequenz $\omega_{1,2} = \omega \pm \frac{\Delta\omega}{2}$

$$\omega = (\omega_1 + \omega_2) / 2, \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2, \quad \Delta\omega \ll \omega$$

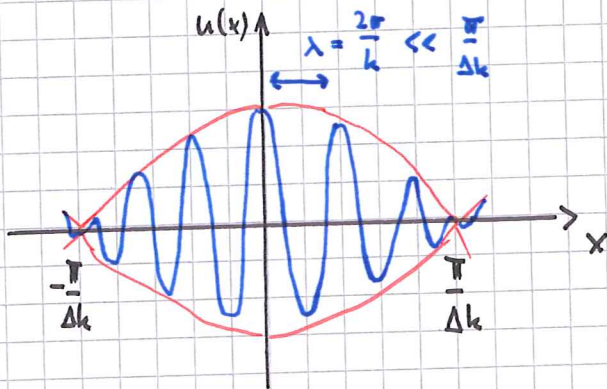
$$k_{1,2} = k \pm \frac{\Delta k}{2}, \quad \Delta k \ll k$$

$$\rightarrow u(x,t) = e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + e^{i(k_2 x - \omega_2 t)} = e^{i(kx - \omega t)} \left(e^{i(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)} + e^{-i(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)} \right)$$

$$= e^{i(kx - \omega t)} \cdot 2 \cos \frac{\Delta k}{2} \left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t \right)$$

$$= 2 e^{ik(x - \frac{\omega}{k}t)} \cos \frac{\Delta k}{2} \left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t \right)$$

schnell langsam
veränderlich (für $\Delta k \ll k$)



$$c_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

Verschiebung der schnell oszillierenden Funktion

$$c_{gr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Verschiebung der Modulation

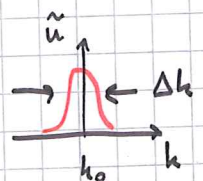
$$\rightarrow \frac{\partial\omega}{\partial k}$$

Allgemeines Wellenpaket

$$u(\vec{r}, t) = \int d^3k \tilde{u}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(\vec{k})t)}$$

$$\vec{k} = \vec{k}_0 + \vec{k}', \quad |\vec{k}'| \approx \Delta k$$

Breite der k -Verteilung



$$t=0: u(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \underbrace{\int d^3k' \tilde{u}(\vec{k}_0 + \vec{k}') e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}}}_{=: \phi(\vec{r})} \text{ langsam veränderlich}$$

$$|\Delta \vec{r}| \approx \frac{1}{\Delta k} \gg \frac{1}{k_0}$$

$t \neq 0$

$$w(\vec{k}) = w(\vec{k}_0) + \left(\vec{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}}\right) w|_{\vec{k}_0} + \frac{1}{2} \left(\vec{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}}\right)^2 w|_{\vec{k}_0} + \dots$$

$$\leadsto u(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t)} \int d^3k' \tilde{u}(\vec{k}_0 + \vec{k}') e^{i\vec{k}' \cdot (\vec{r} - \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}|_{\vec{k}_0} t)} \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \left(\vec{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}}\right)^2 w|_{\vec{k}_0} t}}_{\substack{\text{Verzerrung,} \\ \text{siehe unten,} \\ \text{zunächst } \rightarrow 1}}$$

$$= e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t)} \phi\left(\vec{r} - \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \Big|_{\vec{k}_0} t\right)$$

$$c_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}, \quad \vec{c}_{ph} = \frac{\vec{k}_0 \omega_0}{k_0^2} \quad \text{und} \quad \vec{c}_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \Big|_{\vec{k}_0}$$

Gruppen geschwindigkeit $\hat{=}$ Signalgeschwindigkeit $\hat{=}$ Geschwindigkeit des Energie-transport

$\hat{=}$ Geschwindigkeit der Ausbreitung physikalischer Wirkungen $\leq c_0$

(meist Energie transport gemäß $\vec{s} = c_{gr} w \vec{n}$)
↳ E.dichte

(Phasengeschwindigkeit c_{ph} kann dagegen $\gg c_0$ sein.)

!! Einfluss d. quadratischen Terms (+ höhere) wichtig für

$$\left(\vec{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}}\right)^2 w|_{\vec{k}_0} \cdot t \gtrsim 1, \quad \text{d.h.} \quad t \gtrsim \frac{1}{(\Delta k)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i^2}}$$

Dann:

$$w(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t)} \phi\left(\vec{r} - \vec{c}_{gr} t, t\right)$$

Signal-Verzerrung

Def. von c_{gr} mit Verzerrungen:

$$\vec{r}_s = \langle \vec{r} \rangle = \frac{\int dV \vec{r} |u(\vec{r}, t)|^2}{\int dV |u(\vec{r}, t)|^2}$$

Schwerpunkt des Wellenpakets

$$=: \vec{r}_0 + \vec{c}_{gr} t$$

$$\leadsto \vec{c}_{gr} = \frac{\int d^3k \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} |\tilde{u}(\vec{k})|^2}{\int d^3k |\tilde{u}(\vec{k})|^2} = \left\langle \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \right\rangle \quad (6.1)$$

Dispersionsfreier Fall $c_{ph} = c = \text{const}$

$$\vec{c}_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \frac{\hat{k}}{k} c \quad \leadsto \quad c_{gr} = c_{ph}$$

$\frac{\partial \omega}{\partial k} = c$

(Verzerrung möglich wenn $\frac{\partial \omega}{\partial k} \otimes \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \neq 0$, d.h. wenn c -Richtungsabhängig)