12. Kovariante Formulierung der E.dynamik

12.1. Raum-Zeit-Begriff und Lorentz-Transformation

Bezugssystem: Koordinatensystem zur Bestimmung der räumlichen Lage $\vec{r}$ eines Teilchens, zusammen mit Uhr für Zeit t.

↷ Ort und Zeit sind relativ (abh. von Bezugssystem)

Inertialsystem: Bezugssystem, in dem ein sich frei bewegender Körper (d.h. auf den keine äußeren Kräfte wirken) eine konstante Geschwindigkeit besitzt.

Relativitätsprinzip: Naturgesetze gelten in jedem Inertialsystem in derselben Form. (Invarianz, „Kovarianz")

a) Galilei: Rel.prinzip + instantane Ausbreitung von Wirkungen (Kräfte hängen nur von aktueller Lage der Teilchen ab)

Transformation von Inertialsystem K nach I. system K'

(Galilei-Trafo):

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}\,' &= \vec{r} - \vec{v}t \\ t' &= t \end{aligned}}$$

Relative Geschw.

b) Einstein: Rel.prinzip + Ausbreitung aller Wirkungen mit Lichtgeschw. c.

↷ c hat in allen Inertialsystemen denselben Wert!

↷ Lorentz-Trafo (u.a. Zeit nicht absolut)

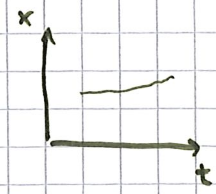
(wird im folgenden abgeleitet)

Vierdimensionaler Raum aus $\vec{r}, t$: $(\underbrace{ct}_{x^0}, \underbrace{x}_{x^1}, \underbrace{y}_{x^2}, \underbrace{z}_{x^3}) = x^i$ (Vierervektor)

(Minkowski – Raum)

In diesem Raum ist ein Ereignis ein Punkt,

ein Teilchen (Teilchenbahn) entspricht einer Linie („Weltlinie").



In diesem Raum werden Abstände Δs (zwischen Ereignissen)

definiert nach

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

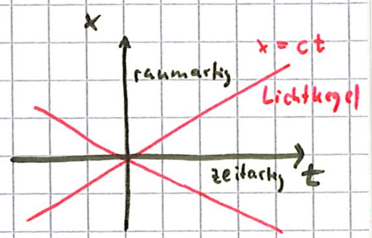
bzw. $\Delta s^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$, $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

(Summation über doppelte Indizes implizit: $\sum_{\mu\nu}$)

Metrischer Fundamentaltensor (Minkowski – Metrik)

Für Lichtausbreitung gilt $\Delta s = 0$.

(in allen Inertialsystemen!)



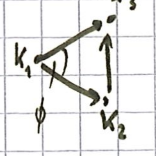
Wir betrachten jetzt 2 Inertialsysteme K, K', die sich mit konstanter Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegen, und 2 Ereignisse mit infinitesimalem Abstand ds, ds'. Wir wollen beweisen, daß Lorentz-Trafo $ds = ds'$ bedeutet.

– Konstanz von c $\curvearrowright$ $ds^2 = 0 \longleftrightarrow ds'^2 = 0$ $\curvearrowright$ $ds^2 = a\, ds'^2$
(Abstände muß linear sein)

– Homogenität & Isotropie des Raums $\curvearrowright$ $a = a(|\vec{v}|)$

– 3 Inertialsysteme K_1, K_2, K_3 :

$$ds_1^2 = a(v_{12})\, ds_2^2$$
$$ds_1^2 = a(v_{13})\, ds_3^2$$
$$ds_2^2 = a(v_{23})\, ds_3^2$$



$\curvearrowright$ $a(v_{23}) = a(v_{13}) / a(v_{12})$. v_{23} muß aber von v_{12}, v_{13} und dem Winkel ϕ abhängen (der aber nicht eingehen darf). $\curvearrowright$ $a = 1$ q.e.d.

$\curvearrowright$ $s = s'$ 4er-Abstand ist invariant unter Lorentz-Trafo.

Zeitartige Abstände $\Delta s_{12}^2 > 0$

Für 2 Ereignisse mit zeitartigem Abstand, $\Delta s_{12}^2 > 0$, existiert Inertialsystem K', in dem beide Ereignisse am gleichen Ort stattfinden:

$$(c\,\Delta t')^2 = (c\,\Delta t)^2 - \Delta \vec{r}^{\,2}, \qquad (\Delta \vec{r}\,')^2 = 0$$

Raumartige Abstände $\Delta s_{12}^2 < 0$

Für 2 Ereignisse mit raumartigem Abstand, $\Delta s_{12}^2 < 0$, existiert K', in dem beide Ereignisse gleichzeitig sind. (!) (↷ Relativität der Gleichzeitigkeit)

$$-\Delta \vec{r}\,'^2 = (c\,\Delta t)^2 - (\Delta \vec{r})^2, \qquad (c\,\Delta t')^2 = 0$$

Da Δs^2 Invariante ist, ist Unterteilung in raum- und zeitartige Abstände absolut (!).

Eigenzeit (eines Beobachters oder Teilchens)

Zeit, die von Uhr angezeigt wird, die sich mit Gegenstand mitbewegt. (Gegenstand kann sich dabei beliebig bewegen.)

Uhr mit fest verbundenem Koordinatensystem K' definiert momentanes Inertialsystem

Vergleiche Zeit dt in bel. BZ mit Eigenzeit dt_E $(=\Delta t')$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^{\,2} = c\,dt_E^2 - 0 \qquad (d\vec{r}_E^{\,2} = 0)$$

$$dt_E^2 = dt^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right) = dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$dt = dt_E \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2} \geq dt_E$$

Zeitdilatation

Lorentz-Transformation:

Transformation der Koord $(t, \vec{r})$ eines Ereignisses im Inertialsystem K in die Koord $(t', \vec{r}')$ desselben Ereignisses in K'. $\left[\vec{r}' = \vec{r}'(\vec{r}, t), \quad t' = t'(\vec{r}, t)\right]$

Prämissen:
- Homogenität von Raum & Zeit $\curvearrowright$ lineare Trafo
- Lichtgeschwindigkeit konstant $\curvearrowright$ ds^2 invariant

Spezielles Fall: K' bewegt sich relativ zu K mit Geschwindigkeit v entlang der x-Achse. Also $\vec{v} \parallel \hat{e}_x \parallel \hat{e}_x'$. (Drehung des 3er-Koordsystems trivial.)

Ansatz: (allg linear)

$$x' = a(x - ut)$$
$$t' = b(t + wx)$$
$$y' = y, \quad z' = z$$

- Bewegung des Ursprungs $x' = 0$ mit v in K $\curvearrowright$ $\underline{u = v = |\vec{v}|}$
- –"– $x = 0$ mit $-v$ in K' $\curvearrowright$ $x' = -avt, \quad t' = bt$ $\curvearrowright$ $\underline{a = b}$
- $ds^2 \overset{!}{=} ds'^2$ $\curvearrowright$ $c^2 dt^2 - dx^2 = a^2 c^2 (dt + w\,dx)^2 - a^2 (dx - v\,dt)^2$

Koeff vgl:

$$\left.\begin{aligned} dt^2&: \quad c^2 \overset{!}{=} a^2 (c^2 - v^2) \\ dx^2&: \quad -1 \overset{!}{=} a^2 (c^2 w^2 - 1) \end{aligned}\right\} \curvearrowright 1 - v^2/c^2 = 1 - w^2 c^2 \curvearrowright w = \pm \frac{v}{c^2}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dx\,dt: \quad 0 \overset{!}{=} 2a^2 c^2 w + 2a^2 v \curvearrowright w = -v/c^2$$

$\curvearrowright$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad & x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad & t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y &= y', \quad z = z' \end{aligned}}$$

Spezielle Lorentz-Transformation $(v < c\ !)$

NICHT KOMMUTATIV

$(v/c \to 0 \curvearrowright$ Galilei-Trafo$)$

[Allg. Lorentz-Trafo: Räumliche Drehung + spez. Lorentz-Trafo]

Aus Lorentz-Trafo folgt z.B. ,

Längenkontraktion

Objekt in K' in Ruhe , l_0 Ruhelänge

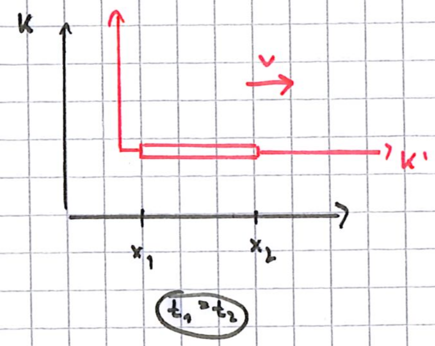
Wegen $x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{\ }}$ folgt mit $\Delta x' = l_0$, $\Delta t = 0$ in K : $l_0 = \dfrac{l}{\sqrt{\ }}$

$$\curvearrowright \quad \boxed{l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < l_0}$$

Längenkontraktion

Achtung: Gleichzeitigkeit ist in K (dort wird Länge gemessen!)

(Fakt „Objekt ruht in K'" heißt: Koordinaten in K' sind Punkte des Objekts)



Transformation der Geschwindigkeit

$$dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{\ }} \quad , \quad dt' = \frac{dt - v/c^2\, dx}{\sqrt{\ }}$$

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v\,dt}{dt - v/c^2\, dx} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy \sqrt{\ }}{dt - v/c^2\, dx} = \frac{u_y \sqrt{\ }}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

bzw. vektoriell:

$$\boxed{u_\parallel' = \frac{u_\parallel - v}{1 - \frac{\vec v \cdot \vec u}{c^2}} \quad , \quad u_\perp' = \frac{u_\perp \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{\vec v \cdot \vec u}{c^2}}}$$

Beträge:

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{1 - v^2/c^2}{\left(1 - \frac{\vec u \cdot \vec v}{c^2}\right)^2}$$

Grenzfälle: $v/c \to 0$, $u/c \to 0$: $u_\parallel' = u_\parallel - v$, $u_\perp' = u_\perp$

$u = c \curvearrowright u' = c$

$v = c \curvearrowright u' = c$

12.2. Vierergrößen und Kovarianz

Dreidimensionaler Raum: $\vec{r} = (x, y, z)$ Komponenten transformieren sich bei Drehung, $\vec{r}\,' = \underline{\underline{U}}\,\vec{r}$, $\underline{\underline{U}}$ Drehmatrix, $\det U = \pm 1$

Vektor $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ transformiert sich wie $\vec{r}$ bei Drehung.

Skalare $\vec{r}^{\,2} = x^2 + y^2 + z^2$, $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ invariant bei Drehung.

Vierdimensionaler Raum: (im Prinzip analog, aber hier nicht-euklidisch wegen Abstandsdef.!)

Def.

$$\underline{x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r})}$$

$(ct, \vec{x})$

$$dx^\mu = (c\,dt, d\vec{r})$$

Die Transformationseigenschaften von x^μ, dx^μ sind bekannt: Lorentz-Trafo + Drehungen.

Explizit:

$$x^{0\prime} = \gamma\,(x^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{x})$$

$$x^{\parallel\prime} = \gamma\,(x^\parallel - \beta x^0)$$

$$x^{\perp\prime} = x^\perp$$

$\vec{\beta} = \vec{v}/c$, $\beta = v/c$

$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$

Def. Kontravarianter Vektor

$$\underline{A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)}$$ transformiert sich wie x^μ, d.h.

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu$$

Def. Kovarianter Vektor

$$\underline{A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)}$$ mit

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu .$$

Aus Transformationseigenschaften (s.u.) folgt

$$A_\nu = g_{\mu\nu} A^\mu , \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$ metrischer Tensor

Def. Skalarprodukt

$$\underline{A \cdot B = A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^\mu B_\mu}$$

ist invariant unter Lorentz-Trafo wegen

Lorentz-Skalar

$$A' \cdot B' = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} A_\nu B^\kappa = \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\kappa}}_{\delta^\nu_\kappa} A_\nu B^\kappa = A_\kappa B^\kappa = A \cdot B$$

Indexkontraktionen mit g: $\quad g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa} = \delta_\mu^{\ \kappa}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx_\nu\, dx^\nu \qquad (x_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu)$$

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \qquad (x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu)$$

Tensoren: kontravariant $F^{\mu\nu}$, kovariant $F_{\mu\nu}$, gemischt $F^\mu{}_\nu$ (z.B. $F^{\mu\nu} = A^\mu A^\nu$ dyadisches Produkt, transformiert sich wie $x^\mu x^\nu$)

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \qquad \text{etc.}$$

Ableitung: Wie transformiert sich $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$? $\quad \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta}$

$\curvearrowright$ Differenzieren nach kontravarianten Koord. liefert kovarianten Vektor!

$$\boxed{\begin{aligned} \partial^\alpha &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec\nabla\right) \\ \partial_\alpha &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec\nabla\right) \end{aligned}}$$

Divergenz ist Invariant: $\quad \partial_\alpha A^\alpha = \partial^\alpha A_\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \operatorname{div}\vec A \qquad$ (nicht "$-$")

Wellen op ist invariant: $\quad \partial_\alpha \partial^\alpha = \partial^\alpha \partial_\alpha = \Box = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 - \vec\nabla^2$

(*)

Bemerkung: Manche Bücher benutzen alternative 4er-Schreibweise:

$$x^\mu = (\vec r, ict) = x_\mu$$

$$dx^2 = \sum dx^{\mu\,2} = \vec r^{\,2} - ct^2$$

Äquivalent, aber schlecht verallgemeinerbar (zB. für ART)

(*) Einsteinsches Relativitätsprinzip: (Gleichungen invariant unter Lorentz trafo)

$\Leftrightarrow$ Gleichungen zwischen Vierergrößen (mit gleichen Transformationseigenschaften)

(zB. $A^\mu = B^\mu \Leftrightarrow A'^\mu = B'^\mu$)

Matrixschreibweise der Lorentz-Trafo:

$$x'^{\mu} = \Omega^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \quad , \quad \Omega^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

Spezielle Lorentz-Trafo von oben:

$$\Omega^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = v/c \,, \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

Mit beliebiger $\vec{v}$-Richtung, aber ohne Drehung:

$$\Omega^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_1^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma-1)\frac{\beta_2\beta_1}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_2^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & (\gamma-1)\frac{\beta_3\beta_1}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_3\beta_2}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

„Lorentz-Boost"

$(\det \Omega = +1)$

Allg. Lorentz-Trafo: Kombination von Boost mit Drehungen im 3-dim. Ortsraum.

Lorentz-Gruppe hat 6 Generatoren: 3× Boost, 3× Drehungen

12.3. Relativistische Mechanik (kurz)

Zeitableitungen von Vierervektoren (Ort → Geschwindigkeit ; Impuls → Kraft)

müssen mit invarianter Eigenzeit t_E gebildet werden ! $\quad d/dt_E = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\, d/dt = \gamma \frac{d}{dt}$

Vierergeschwindigkeit :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt_E} = \frac{(c\,dt, d\vec{r})}{\frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2 - d\vec{r}^{\,2}}} = \frac{(c, \vec{v})}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Test: $u^\mu u_\mu = \frac{c^2 - v^2}{1 - v^2/c^2} = c^2$ invariant

Viererimpuls :

$$p^\mu = m_0 u^\mu$$

m_0 : invariante Ruhemasse, Körpereigenschaft

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(c, \vec{v})$$

Test. $p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2$

Viererkraft:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{dt_E}$$

$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{K}$

Ortskomponenten : $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\ }}\frac{d}{dt}}_{d/dt_E}\Big(\underbrace{\frac{m_0}{\sqrt{\ }}\vec{v}}_{\vec{p}}\Big) \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{\ }}\vec{K}$ (Newton)

$$\curvearrowright \quad F^\mu = \frac{\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{K}}{c}, \vec{K}\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

wobei $\vec{K}$ die übliche Kraft ist, und F^0 aus Invarianz von $u_\mu F^\mu$ folgt.

Energie :

Nullkomponente von $F^\mu = \frac{dp^\mu}{dt_E}$

liefert $\frac{d}{dt}\frac{m_0c^2}{\sqrt{\ }} = \vec{v}\cdot\vec{K}$ (Leistung !) .

$$\curvearrowright \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2$$

mit geschwindigkeitsabhängiger Masse $m(\vec{v}) = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$(\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v})$

$$\curvearrowright \quad p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

$$p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \vec{p}^{\,2} \overset{!}{=} m_0^2 c^2$$

$$\curvearrowright \quad E^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2$$

$v/c \ll 1$: $\quad E = m_0c^2\sqrt{1 + p^2/(m_0c)^2} \approx m_0c^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0}$

$v = c$: $\quad$ Aus $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ und $E \overset{!}{<} \infty$ folgt $m_0 = 0$. $\curvearrowright E = pc$.

12.4. Vierdimensionale Elektrodynamik

Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$

Viererstromdichte $\underline{j^\mu = (\rho c, \vec{j})}$ $\curvearrowright$ $\underline{\text{Kontgl.}\quad \partial_\mu j^\mu = 0}$

Bsp. Konvektionsstrom $\vec{j} = \rho v$

$$\sim\quad j^\mu = \rho(c, \vec{v}) = \underbrace{\rho\sqrt{1-v^2/c^2}}_{\rho_0}\ \underbrace{\frac{(c, \vec{v})}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}_{u^\mu}$$

(invariante Ruheladungsdichte)

Plausibel: $dQ = \rho\, dV$

$dV = dx\,dy\,dz = dx_0 \sqrt{\ }\, dy_0 dz_0$

$\sim\quad dQ = \rho\, dV = \frac{\rho_0}{\sqrt{\ }} \sqrt{\ }\, dV_0 = \rho_0 dV_0$ $\curvearrowright$ Q invariant, ρ transformiert sich

Elementarteilchen-Experimente!

Lorentzkraft $\vec{K} = Q\left(\frac{c\vec{E}}{c} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$

4 dim $\underline{F^\mu = Q\, F^{\mu\nu} u_\nu}$ ($F^{\mu\nu}$ = Feldstärketensor)

$$F^\mu = \frac{\left(\frac{\vec{K}\cdot\vec{v}}{c}, \vec{K}\right)}{\sqrt{\ }}, \quad u_\nu = \frac{(c, -\vec{v})}{\sqrt{\ }}$$

Die Komponenten von $F^{\mu\nu}$ erhält man durch Koeff.vgl.

Feldstärketensor

(Achtung: Jackson III inkonsistent mit c)

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ +E_1/c & 0 & -B_3 & +B_2 \\ +E_2/c & +B_3 & 0 & -B_1 \\ +E_3/c & -B_2 & +B_1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\vec{E}/c \\ \hline \vec{E}/c & \vec{\mathbb{1}} \times \vec{B} \end{array}\right)$$

$$(\vec{\mathbb{1}} \times \vec{B})_{kl} = \vec{e}_k (\vec{\mathbb{1}} \times \vec{B}) \vec{e}_l = (\vec{e}_k \times \vec{B})\, \vec{e}_l = -(\vec{e}_k \times \vec{e}_l)\, \vec{B}$$

$$F_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \vec{E}/c \\ \hline -\frac{\vec{E}}{c} & \vec{\mathbb{1}} \times \vec{B} \end{array}\right)$$

Inhomogene Maxwell-Gl.

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 c\, \varepsilon_0 \operatorname{div}\vec E &= \mu_0 c \rho \\ \operatorname{rot}\vec B - \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\vec E} &= \mu_0 \vec j \end{aligned}\right\} \mu_0 j^\mu$$

$$\curvearrowright \quad \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu}$$

Test:

$$\partial_0 F^{00} + \partial_k F^{k0} = \mu_0 \rho c$$

$$\partial/\partial\vec r \; \vec E/c = \mu_0 \rho c$$

$$\partial_0 F^{0l} + \partial_k F^{kl} = \mu_0 j^l$$

$$\dot{\vec E}/c^2 + \underbrace{\partial/\partial\vec r \, (\vec 1 \times \vec B)}_{\operatorname{rot}\vec B} = \mu_0 \vec j$$

Homogene Maxwell-Gl.

$$\operatorname{div}\vec B = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec E + \dot{\vec B} = 0$$

$$\curvearrowright \quad \boxed{\underbrace{\partial_\kappa F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\kappa\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\kappa}}_{\text{Antisymm. Tensor 3. Stufe}} = 0}$$

Test:

$\kappa\lambda\mu = 123 \qquad -\operatorname{div}\vec B = 0$

$\kappa\lambda\mu = 023, \; 031, \; 012 \qquad \operatorname{rot}\vec E = -\dot{\vec B}$

$\kappa = \lambda \quad \curvearrowright \quad 0 = 0$

(* Blatt 13-12)

Viererpotential:

$$\vec B = \operatorname{rot}\vec A, \quad \vec E = -\operatorname{grad}\varphi - \dot{\vec A}$$

$$A^\mu = (\varphi/c, \vec A), \quad A_\mu = (\varphi/c, -\vec A)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\curvearrowright \quad \Box A^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad \text{Lorentz-Eichung } \partial_\mu A^\mu = 0$$

$$\left(\operatorname{div}\vec A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0\right)$$

Manchmal braucht man den dualen Feldstärketensor:

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3/c & -E_2/c \\ B_2 & -E_3/c & 0 & E_1/c \\ B_3 & E_2/c & -E_1/c & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{für } \alpha\beta\gamma\delta = 0123 \text{ oder gerade Permutation} \\ -1 & \text{ungerade Permutation} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann lauten homogene Maxwell-Gl.:

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0$$

12.5. Transformation des el.mag. Feldes

Lorentz-Trafo $\quad \Omega^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vektor-Trafo: $\quad A'^{\mu} = \Omega^{\mu}{}_{\varkappa} A^{\varkappa}$

Tensor-Trafo: $\quad F'^{\mu\nu} = \Omega^{\mu}{}_{\varkappa} \Omega^{\nu}{}_{\lambda} F^{\varkappa\lambda}$

Einsetzen ergibt:

$$\boxed{E_{\parallel}' = E_{\parallel} \qquad B_{\parallel}' = B_{\parallel} \qquad E_{\perp}' = \frac{E_{\perp} + \vec{v}\times\vec{B}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad B_{\perp}' = \frac{B_{\perp} - \vec{v}\times\vec{E}/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Nichtrel. Grenzfall: $v/c \to 0$

$$E_{\parallel}' = E_{\parallel}, \quad E_{\perp}' = E_{\perp} + \vec{v}\times\vec{B} \quad \curvearrowright \quad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}$$

$$B_{\parallel}' = B_{\parallel}, \quad B_{\perp}' = B_{\perp} \quad \curvearrowright \quad \vec{B}' = \vec{B}$$

Relat. Korrektur: $\quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}$

Alternative Ableitung: $\quad \vec{K} = q\,(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B})$ $\quad$ Trafo bekannt

$\vec{K}' = q\,(\vec{E}' + \vec{u}'\times\vec{B}')$ $\quad$ Trafo unbekannt

$\curvearrowright$ Kraftregel

(Galilei $\vec{K} = \vec{K}'$, $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$: $\vec{E}' + \vec{u}'\times\vec{B}' = \vec{E} + (\vec{u}' + \vec{v})\times\vec{B}$

$\forall \vec{u}'$: $\vec{B}' = \vec{B} \curvearrowright \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}$)

Invarianten: $\quad \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = B^2 - E^2/c^2$

$$\frac{1}{8} F^{\mu\nu} F^{\varkappa\lambda} \varepsilon_{\mu\nu\varkappa\lambda} = \frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{c}$$

Potential einer gleichförmig bewegten Punktladung:

Ruhesystem $\phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'}$, $\vec{A}' = 0$

Da $A^\mu = (\phi/c, \vec{A})$ ein Vierervektor ist ↷ Lorentz-Trafo mit $(-v)$:

Bewegtes BS: $\phi(\vec{r},t) = \gamma\phi'$, $\vec{A} = -\gamma\beta\,\phi'/c$ $\beta = -\frac{v}{c}$

Trafo der Koord. ↝:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma}{\left((x-vt)^2\gamma^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 q\vec{v}}{4\pi}\frac{\gamma}{\left((x-vt)^2\gamma^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

(Spezialfall von Liénard-Wiechert aus Kap 8.7.)

12.6. Lorentz - Kraft - Dichte

Lorentz - Kraft $\quad \vec{K} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \curvearrowright \quad F^{\mu} = Q\, u_{\nu}\, F^{\mu\nu}$

-II- Kraft-Dichte $\quad \vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad \curvearrowright \quad f^{\mu} = j_{\nu}\, F^{\mu\nu}$

$(j^{\mu} = \rho_0 u^{\mu}$; Q, ρ_0 invariant!)

Test: $(k = 1,2,3)$

$$f^{k} = j_0 F^{k0} + j_{\ell} F^{k\ell} = j_0 F^{k0} - j_{\ell} F^{\ell k} \qquad (j_{\ell} = -\vec{j})$$

$$\vec{f} = \rho c\, \frac{\vec{E}}{c} + \vec{j}\,(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad //$$

$$f^{0} = \underset{\substack{\| \\ 0}}{j_0 F^{00}} + j_{\ell} F^{0\ell} = \frac{\vec{j} \cdot \vec{E}}{c} = -\dot{v}/c$$

Erzeugungsdichte für elmag Energie
$(\vec{j} \cdot \vec{E} \curvearrowright$ Joulesche Wärme)

$$\curvearrowright \qquad f^{\mu} = \left(\frac{\vec{j} \cdot \vec{E}}{c}, \vec{f}\right) = \left(-\dot{v}/c, \vec{f}\right) \qquad \left(\text{vgl. } F^{\mu} = \frac{\left(\frac{\vec{K} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{K}\right)}{\sqrt{\;\;}}\right)$$

Bem. f^{μ} hat kein Faktor $\frac{1}{\sqrt{\;\;}}$, da durch invariantes Volumenelement dividiert wird:

$$f^{\mu} = dF^{\mu}/dV_0 = dF^{\mu}/dV \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad \vec{f} = \frac{d\vec{K}}{dV}$$

12.7. Energie-Impuls-Tensor

Wir wissen: $\dot{w} + \operatorname{div} \vec{S}_p = v = -\vec{j}\,\vec{E}$

$\dot{\vec{g}} + \operatorname{div} \overset{\leftrightarrow}{T} = -\vec{f}$

Zusammenfassen zu 4er-Gleichung:

$$\boxed{\partial_\nu T^{\mu\nu} = -f^\mu}$$

mit

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} w & \vec{S}_p/c \\ \hline \vec{g}c & \overset{\leftrightarrow}{T} \end{array}\right)$$

Allgemein für alle Feldtheorien (zB. Kontinuumsmechanik): Energie- und Impulsbilanz in Tensorgleichung

Aus bekannten Transformationsgesetzen von $T^{\mu\nu}$ (Vierertensor) folgen Trafo von v, $\overset{\leftrightarrow}{T}$, $\vec{S}_p$.

Zusammenhang mit Feldern: $\quad w = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2, \quad \vec{S}_p = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$

$\curvearrowright$ $T^{\mu\nu}$ ist quadratisch in $F^{\mu\nu}$.

Wie kann man aus $F^{\mu\nu}$ & $F^{\alpha\beta}$ einen zweistufigen Tensor bauen? $\left\langle \begin{array}{l} F^{\mu\varkappa} F_\varkappa{}^\nu \\ g^{\mu\nu} F^{\varkappa\lambda} F_{\varkappa\lambda} \end{array}\right.$

Ansatz: $T^{\mu\nu} = \alpha F^{\mu\varkappa} F_\varkappa{}^\nu + \beta F^{\varkappa\lambda} F_{\varkappa\lambda}\, g^{\mu\nu}$

Explizit vergleichen $\curvearrowright$ $\alpha = 1/\mu_0, \quad \beta = 1/4\mu_0$

$$\curvearrowright \quad \boxed{T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\mu\varkappa} F_\varkappa{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\varkappa\lambda} F_{\varkappa\lambda}\right)}$$

$T^{\mu\nu}$ ist symmetrisch: $\quad T_1^{\nu\mu} = F^{\nu\varkappa} F_\varkappa{}^\mu = F^\nu{}_\varkappa F^{\varkappa\mu} = (-F^{\mu\varkappa})(-F_\varkappa{}^\nu) = T_1^{\mu\nu}$

F antisymm.

$\curvearrowright \quad \vec{g}\cdot c = \vec{S}_p/c$

$T_{xy} = T_{yx}$ (Drehimpuls-Erhaltung)

Bemerkung: Mechanik $\quad T_m^{\mu\nu} \curvearrowright \partial_\nu T_m^{\mu\nu} = f^\mu$

E.dyn $\quad T_{elm}^{\mu\nu} \curvearrowright \partial_\nu T_{elm}^{\mu\nu} = -f^\mu$

$\curvearrowright \quad T^{\mu\nu} = T_m^{\mu\nu} + T_{elm}^{\mu\nu} \qquad \boxed{\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0}$

Globale Energie- & Impulserhaltung