Elektrodynamik	Institut für Theoretische Physik
Wintersemester 2023/24	Prof. Dr. M. Vojta & Dr. M. Haque

1. Übung

Besprechung: Woche vom 16.10.2023 bis 22.10.2023

Aufgabe 1 Rechnen mit Vektorfeldern [Punkte: 2+(2+2)+2+2=10]

Die Komponenten C_i des Vektorprodukts $\vec{C} := \vec{A} \times \vec{B}$ lassen sich durch den total antisymmetrischen Tensor (das Levi-Civita-Symbol)

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } ijk \text{ gerade Permutation von 123 ist,} \\ -1 & \text{wenn } ijk \text{ ungerade Permutation von 123 ist,} \\ 0 & \text{wenn mindestens 2 Indizes gleich sind,} \end{cases}$$

ausdrücken: $\boxed{C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k}$, mit automatischer Summation über die doppelt vorkommenden Indizes j, k.

Die Identität $\boxed{\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}}$ (mit automatischer Summation über k) gilt für alle i, j, l, m.

(a) Beweisen Sie die Graßmann-Identität (die "bac-cab-Regel")

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\;\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\;\vec{b})$$

für das doppelte Vektorprodukt.

(b) $\vec{v}(\vec{r})$ und $\vec{w}(\vec{r})$ sind stetig differenzierbare Vektorfelder. Beweisen Sie mithilfe des Levi-Civita-Tensors:

$$(b1) \qquad \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{w})$$

$$(b2) \qquad \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$$

(c) Berechnen/vereinfachen Sie die folgenden Ableitungen:

$$\nabla \cdot \vec{r}, \qquad \nabla r^\alpha, \qquad \nabla f(r), \qquad \nabla \cdot \vec{e}_r.$$

Hier und in Teilaufgabe (d):

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ ist der Ortsvektor;} \quad r := |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ ist dessen Betrag;}$$

$$\vec{e}_r := \frac{\vec{r}}{r} \text{ ist der Einheitsvektor in Richtung von } \vec{r};$$

$f(r)$ ist eine (differenzierbare) skalare Funktion des Arguments r.

(d) Berechnen/vereinfachen Sie die folgenden Ableitungen:

$$\nabla \cdot (f(r)\vec{e}_r)\,, \qquad \nabla \times (f(r)\vec{r})\,.$$

Hinweis: $\nabla \times (f\vec{G}) = f\left(\nabla \times \vec{G}\right) + (\nabla f) \times \vec{G} = f\left(\nabla \times \vec{G}\right) - \vec{G} \times (\nabla f)$

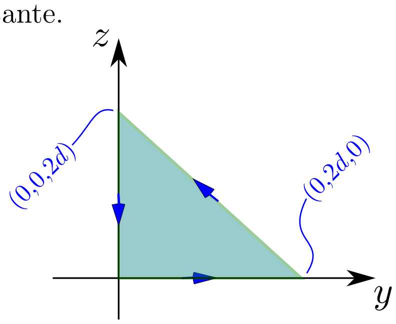
Aufgabe 2 <u>Stokes'scher Satz und Gaußscher Satz:</u> [Punkte: 4+4+2=10]

(a) Die in der Abbildung dargestellte Fläche A mit der Form eines rechtwinkligen Dreiecks liegt in der y-z-Ebene. Hier ist d eine positive Konstante.

Verifizieren Sie den Stokes'schen Satz für das Vektorfeld

$$\vec{v} = (xy)\vec{e}_x + (2yz)\vec{e}_y + (3zx)\vec{e}_z$$

für die Fläche A.



(b) Verifizieren Sie den Gaußschen Satz für das Vektorfeld

$$\vec{w} = ax\,\vec{e}_x + 2ay\,\vec{e}_y + 3az\,\vec{e}_z$$

und die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Hier sind a und R positive Konstanten.

(c) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$

(i) durch die Oberfläche einer Kugel (Radius R, Mittelpunkt im Koordinatenursprung) und

(ii) durch die Oberfläche eines Kreiszylinders (Höhe h, Radius R, untere Grundfläche liege in der x-y-Ebene mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung).

mithilfe des Gaußschen Integralsatzes.