Elektrodynamik	Institut für Theoretische Physik
Wintersemester 2023/24	Prof. Dr. M. Vojta & Dr. M. Haque

2. Übung
Besprechung: Woche vom 23.10.2023 bis 27.10.2023

Aufgabe 3 Krummlinige Koordinatensysteme [Punkte: 2+2+(2+1+1) = 8]

Für krummlinige Koordinatensysteme (q_1, q_2, q_3) sind die Skalenfaktoren h_i wichtig:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = h_i \vec{e}_{q_i}, \qquad h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|, \qquad \vec{e}_{q_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|}.$$

(a) Für das zylindrische Koordinatensystem:

- Bestimmen Sie die Skalenfaktoren h_ρ, h_ϕ, h_z;
- Drücken Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_z$ durch $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ aus.

(b) Für das Kugelkoordinatensystem:

- Bestimmen Sie die Skalenfaktoren h_r, h_θ, h_ϕ;
- Drücken Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ durch $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ aus.

(c) Zeigen Sie, dass der Gradient für krummlinige orthogonale Koordinatensysteme (q_1, q_2, q_3) sich als

$$\nabla = \sum_j \vec{e}_{q_j} \frac{1}{h_j} \frac{\partial}{\partial q_j}$$

ausdrücken lässt.

Hinweis: Vergleichen Sie die Ausdrücke

$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} dq_j \qquad \text{und} \qquad df = \vec{dr} \cdot \nabla f = \left(\sum_j h_j dq_j \vec{e}_{q_j} \right) \cdot \nabla f$$

wobei $f(\vec{r})$ eine beliebige hinreichend differenzierbare Funktion ist.
Die Operatorkomponente in Richtung $\vec{e}_{q_j}$ ist $\vec{e}_{q_j} \cdot \nabla$.

Bestimmen Sie daraus den Gradienten in Kugelkoordinaten.

Berechnen Sie $\nabla(\vec{\alpha} \cdot \vec{r})$, wobei $\vec{\alpha} = \alpha \vec{e}_z$ ein konstanter Vektor in z-Richtung ist.

Aufgabe 4 <u>Fouriertransformation in einer Dimension</u> [Punkte: (1+1)+(3+3) = 8]

Für die quadratintegrable Funktion $f(x)$ definieren wir die Fourier-Transformation als

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \tilde{f}(k) \quad \text{mit} \quad \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x).$$

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformierten von $xf(x)$ und $f'(x)$.

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformierten $\tilde{f}(k)$ von (σ reell, > 0)

$$\text{(i)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} & \text{für } |x| < \frac{\sigma}{2}\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}, \qquad \text{(ii)} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Aufgabe 5 <u>Fouriertransformation in drei Dimensionen</u> [Punkte: 2+2 = 4]

(a) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte von div $\vec{f}\,(\vec{r})$ durch $i\vec{k}.\tilde{\vec{f}}\left(\vec{k}\right)$ gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte von rot $\vec{f}\,(\vec{r})$ durch $i\vec{k} \times \tilde{\vec{f}}\left(\vec{k}\right)$ gegeben ist.