Elektrodynamik	Institut für Theoretische Physik
Wintersemester 2023/24	Prof. Dr. M. Vojta & Dr. M. Haque

3. Übung

Besprechung: Woche vom 30.10.2023 bis 03.11.2023

Aufgabe 6 Die δ-Funktion / Dirac-Funktion [Punkte: 2+(2+1)+2+2+2+2 = 13]

Die 'δ–Funktion' ordnet einer Funktion $f(x)$ ('Testfunktion') eines reellen Arguments x den Funktionswert $f(0)$ an der Stelle $x = 0$ zu. Die Schreibweise

$$\delta(x) = 0 \text{ für } x \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x) = f(0)$$

ist nützlich. Es folgt:

$$\int_a^b dx f(x)\delta(x) = \begin{cases} f(0) & \text{wenn } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die δ–Funktion ist keine Funktion im üblichen Sinne — in mathematischer Terminologie ist sie eine 'Distribution'. Man kann sich $\delta(x)$ näherungsweise als eine bei $x = 0$ konzentrierte Verteilungsfunktion, z.B.

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{2\epsilon}\, e^{-|x|/\epsilon}, \quad \delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\epsilon} e^{-x^2/\epsilon^2}, \quad \delta_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\pi} \frac{\sin^2 \frac{x}{\epsilon}}{x^2},$$

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{x}{\epsilon}}{x} \qquad \text{und} \quad \delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\epsilon & (|x| < \epsilon) \\ 0 & (|x| > \epsilon) \end{cases}$$

vorstellen. Für kleine ϵ haben alle diese Funktionen die Breite $\propto \epsilon \ll 1$ und haben bei $x = 0$ Werte $\propto \frac{1}{\epsilon} \gg 1$. Für alle ϵ gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x) dx = 1$.

Das 'Ausschneiden' des Funktionswerts $f(x) \longrightarrow f(0)$ erfolgt im Limes $\epsilon \to 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x) = f(0) \quad \text{bedeutet} \quad \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\epsilon(x) dx = f(0).$$

Man schreibt oft $\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(x)$, obwohl es streng genommen nur unter Integralen sinnvoll ist. Um eine Identität über δ-Funktionen zu beweisen, sollte man sie unter Integralen untersuchen, z.B., wenn man $\delta(-x/2) = 2\delta(x)$ schreibt, bedeutet man, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(-x/2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) 2\delta(x)$$

für beliebige wohldefinierte $f(x)$ gilt.

(a) Zeigen Sie: $\delta(ax-b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(x-\frac{b}{a}\right)$ für $a \neq 0$

Spezialfälle (Herleitung nicht gefragt): [i] $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta\,(x)$; [ii] $\delta(x) = \delta(-x)$.

(b) Beweisen Sie, dass

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x-x_n)$$

gilt, wenn $g(x)$ nur endlich viele, einfache Nullstellen x_n hat.

Hinweis: Taylor-Entwicklung von $g(x)$ um jede Nullstelle.

Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ e^x\ \delta\left(x^2-4\right)$.

(c) Zeigen Sie: $-x\delta'(x) = \delta(x)$

(d) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ \cosh(kx)\ \delta'\,(x-c)$, wobei k und c positive Konstanten sind.

(e) Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{x} dy\delta(y) = \Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

Man schreibt daher oft $\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x)$.
Hier ist $\Theta(x)$ die Heaviside-Funktion (Stufenfunktion).

(f) Zeigen Sie durch direktes Ausrechnen der entsprechenden Integrale, dass

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{\epsilon^2+x^2}$$

im Limes $\epsilon \to 0$ eine Darstellung der δ-Funktion ist.

Aufgabe 7 Linienladung [Punkte: 1+2+2+2 = 7]

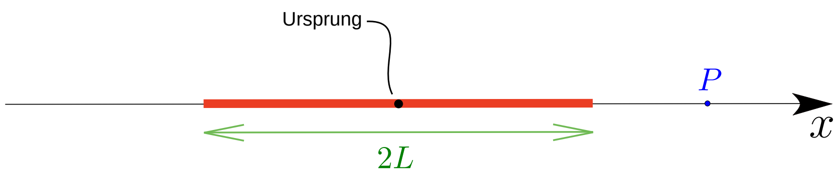
Die Gesamtladung Q sei homogen über eine gerade Linie der Länge $2L$ verteilt. Die Linie erstreckt sich entlang der x-Achse von $-L$ bis L.

Wir betrachten das elektrostatische Potential am Punkt P bei $\vec{r} = (x, y, z)$.

Wir bezeichnen die senkrechte Distanz von der x-Achse als $a = \sqrt{y^2 + z^2}$.

(a) Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ mithilfe von δ-Funktionen und/oder Heaviside-Funktionen an.

In Teilaufgaben **(b,c)** nehmen wir $a = 0$ und $|x| > L$ an, d.h. der Punkt P liegt auf der x-Achse.

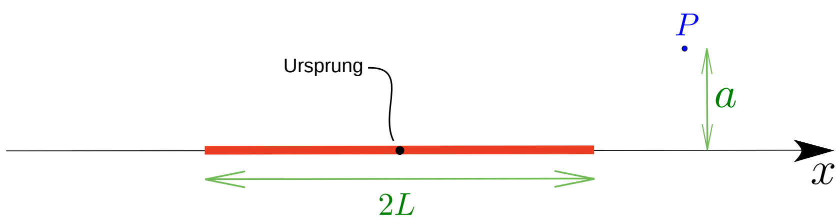


(b) Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\phi(x, 0, 0)$ am Punkt P.

(c) Wir betrachten jetzt den Grenzübergang $L \to 0$ bei konstanter Gesamtladung. Berechnen Sie das Potential in diesem Limes.

> Sie sollten aus physikalischer/geometrischer Überlegung die Antwort schreiben können, bevor Sie eine Rechnung durchführen.

(d) Jetzt betrachten wir den allgemeinen Fall, $a \neq 0$.



Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\phi(x, y, z)$ am Punkt P.