Elektrodynamik	Institut für Theoretische Physik
Wintersemester 2023/24	Prof. Dr. M. Vojta & Dr. M. Haque

7. Übung

Besprechung: Woche vom 27.11.2023 bis 01.12.2023

Aufgabe 19 Entwicklung in Legendre-Polynomen [Punkte: 3+4 =7]

Wir betrachten elektrostatische Systeme mit axialer Symmetrie (Rotationssymmetrie um die z-Achse, d.h. Unabhängigkeit vom Azimutwinkel ϕ). Für solche Systeme hat die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung die Form

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta).$$

Die Legendre-Polynome P_l erfüllen die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{-1}^{+1} dx P_m(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ml} \quad \text{oder}$$

$$\int_0^{\pi} d\theta P_m(\cos\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ml}.$$

Die ersten Legendre-Polynome sind:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

(a) Auf der Oberfläche einer hohlen Kugelschale mit Radius R ist das Potential

$$V_0(\theta) = k_1 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \text{wobei } k_1 \text{ eine positive Konstante ist.}$$

Bestimmen Sie das Potential im Inneren der Kugel.

(b) Die Flächensladungsdichte $\sigma_0(\theta) = k_2 \cos\theta$ wird auf der Oberfläche einer Kugelschale mit Radius R aufgeklebt, wobei k_2 eine positive Konstante ist. Bestimmen Sie das resultierende Potential innerhalb und außerhalb der Kugel mithilfe von Entwicklungen in Legendre-Polynomen.

Hinweise:

1. Die Koeffizienten (A_l, B_l) innerhalb und außerhalb der Kugel sind nicht gleich.
2. Die radiale Komponente des elektrischen Feldes erfährt aufgrund der vorhandenen Oberflächenladung eine Unstetigkeit an der Kugeloberfläche.

Aufgabe 20 <u>Poisson'sche Gleichung bei Kugelsymmetrie</u> [Punkte: 0+3 =3]

Der Raum zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen mit Radien R_1 und R_2 ($R_1 < R_2$) ist mit Ladung gefüllt, mit Ladungsdichte

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R_1 \quad \text{(Region I)} \\ \alpha/r^2 & \text{für } R_1 < r < R_2 \quad \text{(Region II)} \\ 0 & \text{für } r > R_2 \quad \text{(Region III)} \end{cases}$$

wobei α eine positive Konstante ist.

(a) Berechnen Sie die Gesamtladung.

(b) Berechnen Sie das Potential mithilfe der Poissonschen Gleichung. Bestimmen Sie zunächst die allgemeinen Lösungen in den drei Regionen und wenden Sie dann Randbedingungen an, um die Integrationskonstanten zu bestimmen.

> *Hinweis:* Benutzen Sie den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten.
> *Kommentar:* Natürlich sollten Sie auch in der Lage sein, das elektrische Feld (und damit das Potential) mithilfe der ersten Maxwell-Gleichung in Integralform zu berechnen.

Aufgabe 21 <u>Feldenergie und Aufladearbeit</u> [Punkte: 2+2 =4]

(a) Berechnen Sie die gesamte Feldenergie einer homogen geladenen Kugel (Radius R, Gesamtladung Q).

(b) Wir denken uns die Kugel zusammengesetzt aus Ladungsportionen dq, die „aus dem Unendlichen“ herangeholt werden. Dazu ist jeweils die mechanische Arbeit $dA = \varphi dq$ nötig, wobei $\varphi \propto \frac{q}{r}$ das jeweilige Potential der Kugel vom Radius r mit der Gesamtladung q ist. Die Aufladung wird fortgesetzt, bis die Kugel auf den Radius R mit Gesamtladung Q herangewachsen ist; dabei halten wir die Ladungsdichte konstant, so dass jederzeit $q = Q\frac{r^3}{R^3}$ gilt. Berechnen Sie die gesamte Aufladearbeit, die nötig ist, um eine Kugel vom Radius R mit Gesamtladung Q zusammenzufügen, und vergleichen Sie diese mit dem in **(a)** berechneten Wert der Feldenergie.

Aufgabe 22 <u>Rotierende geladene Kreisscheibe</u> [Punkte: 4+2=6]

Eine flache Kreisscheibe vom Radius R trägt die homogen verteilte elektrische Ladung Q. Die Scheibe rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die Figurenachse $= z$–Richtung.

(a) Berechnen Sie die magnetische Feldstärke auf dieser Achse.

Hinweise: Die allgemeine Formel für das $\vec{B}$-Feld einer Stromverteilung $\vec{j}$ ist

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{j}(\vec{r'}) \times \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}.$$

Die Strom- bzw. Ladungsdichte in diesem Fall sind

$$\vec{j}(\vec{r}\,') = \rho(\vec{r}\,')\vec{v}\,', \quad \vec{v}\,' = \Omega \vec{e}_z \times \vec{r}\,' \quad \text{bzw.} \quad \rho(\vec{r}\,') = \frac{Q}{\pi R^2} \delta(z')\Theta(R^2 - x'^2 - y'^2).$$

(b) Bestimmen Sie das magnetisches Dipolmoment.