Elektrodynamik Wintersemester 2023/24	Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. M. Vojta & Dr. M. Haque

8. Übung

Besprechung: Woche vom 04.12.2023 bis 08.12.2023

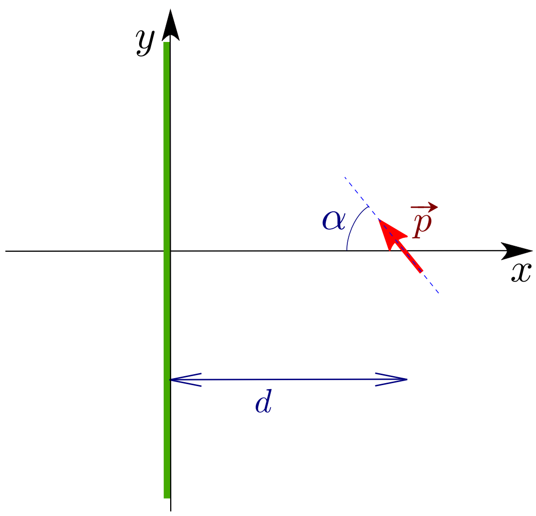
Aufgabe 23 Punktdipol in der Nähe einer Metalloberfläche [Punkte: 1+3 =4]

Ein Punktdipol $\vec{p}$ befindet sich bei $(d, 0, 0)$ im Abstand d von einer geerdeten flachen Metallplatte oder Metalloberfläche, die in der y-z-Ebene liegt.

(a) Der Dipol schließt mit der negativen x-Richtung einen Winkel α ein:

$$\vec{p} = -p\cos\alpha\,\vec{e}_x + p\sin\alpha\,\vec{e}_y$$

Was ist das Dipolmoment des Bilddipols?



(b) Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, um den Dipol von einer senkrechten Ausrichtung (direkt auf das Metall gerichtet) in eine parallele Ausrichtung zu drehen.

Hinweis: Finden Sie das elektrische Feld und damit das Drehmoment, das der Bilddipol auf den physikalischen Dipol ausübt. Die Arbeit, die das Drehmoment $\vec{N}$ beim Drehen eines Objekts um den Winkel $\vec{d\theta}$ verrichtet, ist $dW = \vec{N} \cdot \vec{d\theta}$.

Aufgabe 24 Vektorpotential [Punkte: (2+1)+2+4 =9]

Rotation in Zylinderkoordinaten (s, ϕ, z):

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_s + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right)\vec{e}_\phi + \frac{1}{s}\left(\frac{\partial (s v_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right)\vec{e}_z$$

(a) Wir betrachten ein endliches Drahtsegment, das entlang der z-Achse zwischen den Punkten z_1 und z_2 liegt und einen Strom I in positiver z-Richtung führt. Bestimmen

Sie das magnetische Vektorpotential für dieses stromtragenden Segments an einem Punkt in der x-y-Ebene.
Verwenden Sie Zylinderkoordinaten. Benutzen Sie

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dV' \, \vec{j}\,(\vec{r'})}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|} \qquad \text{(Coulomb-Eichung).}$$

Verwenden Sie Ihr Ergebnis für das Vektorpotential, um das vom stromführenden Segment erzeugte Magnetfeld zu berechnen.

Hinweis: Nötiges integral: $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right)$.
Bemerkung 1: Natürlich muss das Drahtsegment Teil eines Stromkreises sein; andernfalls könnte es keinen zeitunabhängigen Strom aufrechterhalten. Hier ignorieren wir die Wirkung des Rests der Schaltung und konzentrieren uns auf das Feld/Potenzial, das von einem linearen Segment erzeugt wird.
Bemerkung 2: Das Magnetfeld kann direkt mit dem Biot-Savart-Gesetz berechnet werden, ohne das Vektorpotential zu verwenden. Es wird empfohlen, sicherzustellen, dass Sie auch diese alternative Berechnung durchführen können.

(b) Welche Stromdichte würde das Vektorpotential $\vec{A} = k\,\vec{e}_\phi$ erzeugen?
Hier ist k eine Konstante.

(c) Wir betrachten den unendlichen zylindrischen Leiter (Radius R), der einen gleichmäßig verteilten Strom I führt, aus Blatt 06 Aufgabe 17(a). Verwenden Sie die Ergebnisse für das Magnetfeld, um das Vektorpotential sowohl außerhalb als auch innerhalb des Zylinders zu bestimmen.

Aufgabe 25 <u>Strom durch Leiterschleife</u> [Punkte: 3+2+2 =7]

Eine kreisförmige Leiterschleife liegt in der x-y-Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung. Die Schleife trägt den Strom I. Die Stromdichte lautet in Zylinderkoordinaten (s, ϕ, z):

$$\vec{j}(\vec{r}) = I\,\delta(s-R)\,\delta(z)\,\vec{e}_\phi.$$

Man kann zeigen, dass das Vektorpotential sich als

$$\vec{A}(\vec{r}) = A(s,z)\vec{e}_\phi = \vec{e}_\phi\,\frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi' \, \cos\phi'}{\sqrt{R^2 - 2Rs\cos\phi' + s^2 + z^2}}$$

ausdrücken lässt (Herleitung nicht gefragt). Dieses elliptische Integral kann nicht elementar gelöst werden.

(a) Nähern Sie dieses für den Grenzfall $s \ll R$.
Berechnen Sie davon ausgehend das Magnetfeld für $s \ll R$.

Bemerkung: Für $s = 0$ ergibt dies das Magnetfeld auf der z-Achse. Das Feld auf der Achse ist ein Standardergebnis, das auch direkt mit dem Biot-Savart-Gesetz berechnet werden kann, ohne das Vektorpotential zu verwenden. Auch hier empfiehlt es sich, diese direkte Berechnung nachzuschlagen, um sie bei Bedarf selbst durchführen zu können.

(b) Nähern Sie das Integral für den Grenzfall $s \gg R$.

(c) Zeigen Sie, dass die Annäherung für $s \gg R$ die Form des Vektorpotentials eines magnetischen Dipols hat.

Geben Sie das entsprechende magnetische Dipolmoment an.